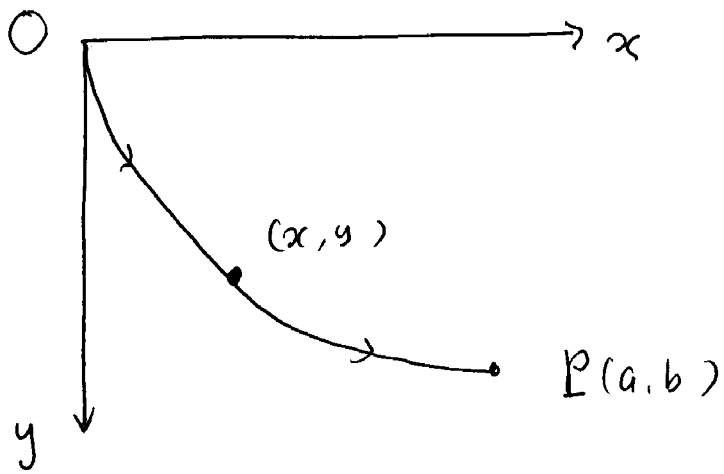
3. 作用と変分法

3-1 Eulerの変分法

変分法とは：$\left\{\begin{array}{l}\text{関数形を変える事により}\\\text{ある積分量を最小にする事}\end{array}\right\}$

［Eulerの解いた問題］

なめらかな黒板の原点Oから質点を$P(a,b)$まで落下させる。この時、落下時間Tが最小になる曲線は何か



点(x,y)での質点の速度vは

$$\boxed{v=\sqrt{2gy}} \quad \left(\because \ \frac{1}{2}mv^2=mgy\right)$$

No.

Date

$$\begin{cases} \text{微小距離} & ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ \text{微小時間} & dt = \dfrac{ds}{v} \end{cases}$$

原点Oから P まで落下するときの時間Tは

$$\boxed{T = \int_0^a \frac{ds}{v} = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, dx}$$

ここで $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$

- Tを最小にしたい

このときの関数形 $y = y(x)$ は何か?

一般に

$$T = \int_0^a F(y, y')\, dx$$

を最小にする $y = y(x)$ を求めたい

(ここでは、$F(y,y') = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$)

[Eulerの変分法]

[基本]：関数形を $\boxed{y(x) \to y(x) + \delta y(x)}$

のように微小量 $\underbrace{\text{微小量}}_{\delta y}$ 変化させる

この時、積分量の応答(response)をみる.

$$\boxed{\delta T \equiv \int_0^a \left\{ F(y+\delta y, y'+\delta y') - F(y, y') \right\} dx}$$

この時, $\delta T = 0$ が T の極値を与える

[微分との対応]　$y = f(x)$ のとき

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$ が極値を与える

$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ より.

◎ 重要：δy, $\delta y'$ は微小量

よって $F(y+\delta y, y'+\delta y') = F(y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots$ より

$$\boxed{\delta T = \int_0^a \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right\} dx}$$ となる.

- $\delta y(x)$ について： 端では $\delta y = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta y(0) &= 0 \\ \delta y(a) &= 0 \end{aligned}}$$

関数形を変える $\Leftrightarrow$ 端は固定

- $\delta y'$ について： $\boxed{\delta y' = \dfrac{d}{dx}\delta y}$ と仮定する

微分と変分の順序はかえてよい

【変分と微分】

今 $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ を考える

このとき

$$\delta y = \delta a_0 + \delta a_1 x + \cdots + \delta a_n \cdot x^n$$ である

よって

$$\underline{\frac{d\,\delta y}{dx} = \delta a_1 + \cdots + n\,\delta a_n \cdot x^{n-1}}$$

一方

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \delta a_1 + \cdots + n\,\delta a_n x^{n-1}$$

$$= \frac{d}{dx}\delta y$$ となっている

よって

$$\delta T = \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{d}{dx} \delta y \right] dx$$

部分積分を第2項にすると

$$\delta T = \int_0^a \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_0^a$$

$$- \int_0^a \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx$$

ところが $\delta y(a) = \delta y(0) = 0$ より

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_0^a = 0$$

よって

$$\underbrace{\delta T = \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx = 0}$$

極値 → $\delta T = 0$ よって

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

が求めるべき Euler 方程式である。

【Eulerが解いた問題】

質点の落下の場合

$$\begin{cases} F(y,y') = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}} & \text{これを} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 & \text{に代入する} \end{cases}$$

[計算手法]　$F(y,y') = y^{-\frac{1}{2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = y'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = y''(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} - y'^2y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \\ \qquad -\dfrac{1}{2}y'^2y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

よって

$$yy''(1+y'^2) - y'^2y''y - \frac{1}{2}y'^2(1+y'^2) = -\frac{1}{2}(1+y'^2)^2$$

書き直すと $\boxed{1+y'^2+2yy''=0}$ となる

これにy'をかけると　$y'+y'^3+2yy'y''=0$　よって

$$\boxed{\frac{d}{dx}(y+yy'^2)=0}$$ これより

$$\boxed{y(1+y'^2) = C = \text{定数}}$$ となる

[微分方程式の解]

$y(1+y'^2)=C$ の解は

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

(サイクロイド)

となる

(注)
$$\begin{cases} dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta \\ dy = a\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

より $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$$y(1+y'^2) = a(1-\cos\theta)\left[1+\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right]$$

$$= a(1-\cos\theta)\frac{2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$= 2a \quad //$$