3-2 作用と最小作用の原理

作用 S （action）の定義

$$\boxed{S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)\, dt}$$

$L(q_i, \dot{q}_i)$: Lagrangian

$$\boxed{L(q_i, \dot{q}_i) \equiv T - U}$$

T : 運動エネルギー

$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ （デカルト座標）

↓

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2)$ （極座標）

U : ポテンシャルエネルギー

[ポイント]

1. t_1, t_2 は固定
2. q_i は一般座標
   $\{q_1, q_2, q_3\} = (x, y, z), (r, \theta, \varphi)$ ....
3. $q_i, \dot{q}_i$ は独立

No.

Date

【最小作用の原理】

$$\boxed{\begin{array}{l} q_i = q_i(t) \text{ の関数形を変えて} \\ S \text{ を最小にする} \end{array}}$$

⇓

こうすると Lagrange 方程式が求まる!!

◎方法： $q_i(t) \to q_i(t) + \underbrace{\delta q_i(t)}_{\text{(微小量)}}$ とする

変化量 δS

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i) \right] dt$$

Taylor 展開すると

$$L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) = L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right]$$

微分と変分は可換と仮定

$$\boxed{\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i}$$ とする

よって
$$\delta S = \sum_{i=1}^{3} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt$$

$$(\text{第2項}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt$$

$$= \underbrace{\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \, dt$$

$\because$ $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$

以上より
$$\delta S = \sum_{i=1}^{3} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i \, dt = 0$$

作用 S を最小にする条件

よって
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

(Lagrange 方程式)

[重要] これは一般座標で成立