3-3 Lagrange 方程式の立て方

Lagrangian は $\boxed{L = T - U}$

$$\begin{cases} T : \text{運動エネルギー} \\ U : \text{ポテンシャルエネルギー} \end{cases}$$

- T の計算 （質点の質量 m）

デカルト座標 (x, y, z) では

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}$$

↓ 場合に応じて変数変換する

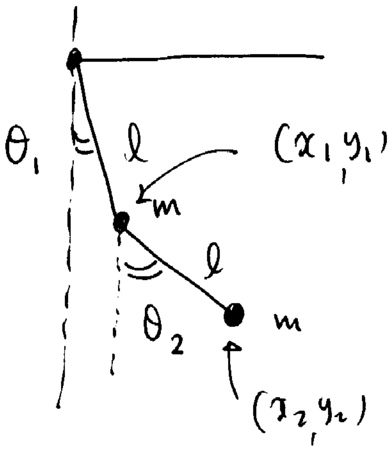
極座標（3次元）

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

極座標（2次元）

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

(1) 2重振り子



- 質点の座標を (x_1, y_1) (x_2, y_2) とする
- 運動は平面だけとする

- Lagrangian L は直ちに書ける

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + mgy_1 + mgy_2$$

ここで $\begin{cases} x_1 = l \sin\theta_1 \\ y_1 = l \cos\theta_1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = l \sin\theta_1 + l \sin\theta_2 \\ y_2 = l \cos\theta_1 + l \cos\theta_2 \end{cases}$

よって

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y}_1 = -l \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = l \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 = -l \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

これより

$$L = \frac{1}{2} m \left(l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$
$$+ mgl \cos\theta_1 + mgl (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

もう少し書き直すと

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \right) + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

あとは Lagrange 方程式 をだす.

変数は $\boxed{\theta_1 \text{ と } \theta_2}$

θ_1」 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \theta_1}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \right) \\ &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl\sin\theta_1 \end{aligned}}$$

θ_2」 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \theta_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) \right) \\ &= -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl\sin\theta_2 \end{aligned}}$$

これが求める運動方程式である. ⇒ 数値計算で解ける

【微小振動の場合】

$$|\theta_1| \ll 1, \quad |\theta_2| \ll 1$$

（同時に $|\dot{\theta}_1| \ll 1$, $|\dot{\theta}_2| \ll 1$ とする）

この時 $\sin\theta_1 \approx \theta_1$, $\sin\theta_2 \approx \theta_2$

よって

$$\boxed{\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 &= -2mgl\theta_1 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1 &= -mgl\theta_2 \end{aligned}}$$

となる。

ここで $\boxed{\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}}$ と定義する。（簡単のため）

よって

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

【解法】

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ \theta_2 &= A_2 e^{i\omega t} \end{aligned}}$$

とおいて代入する。

そして A_1, A_2 に対する方程式にする

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - 2\omega^2) A_1 - \omega^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) A_2 = 0 \end{cases}$$ となる

A_1, A_2 が共にゼロではない解をもつための必要十分条件は行列式がゼロ。より

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0}$$

$\therefore \quad 2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = 0$ より解は

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm 1} \omega_0^2}$$ となる

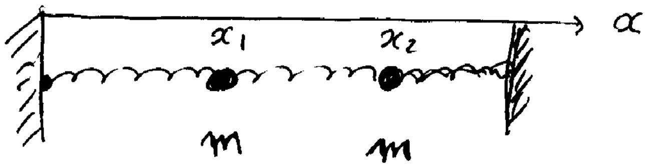
(a) $\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \omega_0^2 = (2 - \sqrt{2}) \omega_0^2$ の時、もとの式より

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$ となる。A_1, A_2 は振幅を表している。

(b) $\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \omega_0^2 = (2 + \sqrt{2}) \omega_0^2$ の時は

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$ となる。

(2) 連成振動



$\boxed{\begin{array}{l}\text{質点の質量 } m \\ \text{自然長 } \ell \text{ のバネ} \\ \text{バネ定数は } k\end{array}}$

バネの自然長はすべて ℓ

- Lagrangian L

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - \ell)^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - \ell)^2 - \frac{1}{2} k (2\ell - x_2)^2}$$

簡単のために $\begin{cases} y_1 = x_1 - \ell \\ y_2 = x_2 - 2\ell \end{cases}$ とおく

よって

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2} k y_1^2 - \frac{1}{2} k (y_2 - y_1)^2 - \frac{1}{2} k y_2^2$$

Lagrange 方程式 :

y_1) $\quad \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \dfrac{\partial L}{\partial y_1} \qquad m \ddot{y}_1 = -2k y_1 + k y_2$

y_2) $\quad \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = \dfrac{\partial L}{\partial y_2} \qquad m \ddot{y}_2 = -2k y_2 + k y_1$

$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ を定義して書き直すと

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 = 0 \\ \ddot{y}_2 + 2\omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 = 0 \end{cases}$$

[解法]

$$\begin{cases} y_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ y_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

とおく。但し ω は未知数

代入すると

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + 2\omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + 2\omega_0^2 A_2 - \omega_0^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

A_1, A_2 が non-zero 解をもつためには

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \underline{(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - \omega_0^4 = 0}$$

よって

$$\omega^2 = \omega_0^2 \ , \ 3\omega_0^2 \text{ が解.}$$

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \omega^2 = \omega_0^2 \text{ の時} : & A_1 = A_2 \\ \text{(ii)} \ \omega^2 = 3\omega_0^2 \ \text{〃} : & A_1 = -A_2 \end{cases}$$

この場合、 A_1 と A_2 の比のみが決定される.