4-3 例題

(a) 3次元自由粒子

$$\underline{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbb{r}}^2} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

運動量 $\mathbb{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbb{r}}} = m \dot{\mathbb{r}}$

これより

$$H = \mathbb{p} \cdot \dot{\mathbb{r}} - L = \frac{\mathbb{p}^2}{m} - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{\mathbb{p}}{m} \right)^2 \right)$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{\mathbb{p}^2}{2m}}$$

Hamilton 方程式
$$\begin{cases} \dot{\mathbb{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbb{r}} = 0 \\ \dot{\mathbb{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbb{p}} = \frac{\mathbb{p}}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \underline{m \ddot{\mathbb{r}} = 0}$$

(b) 1次元調和振動子

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \end{cases}$$

$$\therefore H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right]$$

$$\therefore \underline{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2}$$

Hamilton方程式: $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$, $\dot{x} = \frac{p}{m}$ //

(C) クーロンポテンシャルでの電子の運動

クーロンポテンシャル $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$

Lagrangian $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Ze^2}{r}$

よって

$$H = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

• Hamilton 方程式：

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\therefore \ m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2}{r^3}\mathbf{r}$$

(注) 電磁場と電子の相互作用

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A} - A_0)$$

（静電場だと $A_0 = -\frac{Ze}{r}$ ）

この式は ゲージ不変性より決まる

ゲージ変換：
$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ A_0' = A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

この時 $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}' - A_0') - e\frac{d\chi}{dt}$ となる。

最後の項は運動方程式に影響しない。⟹ 不変