# 4-4 正準変換

Hamiltonian $H$ が

$$\underline{H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q)}$$

と書かれているとする。

この時、$(p,q)$ 系から $(P,Q)$ 系へ変換する。

その時、Hamilton 方程式が $(P,Q)$ 系でも

成りたつような変換を

$\boxed{\text{正準変換}}$ という

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{\partial H'}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \dfrac{\partial H'}{\partial P} \end{cases}$$

【正準変換の場合】

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [\, p\dot{q} - H(p,q) \,]\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [\, P\dot{Q} - H'(P,Q) \,]\, dt$$

となっていれば、Hamilton 方程式は

ともに成立する

この2つが同じ:

$$\boxed{p\,dq - H(p,q)\,dt = P\,dQ - H'(P,Q)\,dt + dF}$$

となっているべきである。

F は任意の関数 ← dFの項は変分に影響しない!!

$F(q,Q)$ : 母関数という

$$\therefore\ \boxed{dF = p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt}$$

一方 数学の公式から

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

と比較すると

$$\boxed{\begin{array}{ll} p = \dfrac{\partial F}{\partial q} & P = -\dfrac{\partial F}{\partial Q} \\ H' = H + \dfrac{\partial F}{\partial t} & \end{array}}$$

となる。

[例題]

$$\begin{cases} Q = \sqrt{2q}\cos p \\ P = \sqrt{2q}\sin p \end{cases}$$

は正準変換である

(証) $pdq - PdQ = pdq - \sqrt{2q}\sin p\, \underbrace{d(\sqrt{2q}\cos p)}_{\sqrt{2}\cdot\frac{dq}{2\sqrt{q}}\cos p + \sqrt{2q}(-\sin p)dp}$

よって

$$pdq - PdQ = pdq - \sin p\cos p\, dq + 2q\sin^2 p\, dp$$

一方

$$2q\sin^2 p\, dp = 2q\,\frac{1-\cos 2p}{2}\,dp = q\,dp - q\cos 2p\, dp$$

なので

$$pdq - PdQ = pdq + q\,dp - (\sin p\cos p\, dq + q\cos 2p\, dp)$$

となる

ところが

$$\begin{cases} pdq + q\,dp = d(pq) \\ \sin p\cos p\, dq + q\cos 2p\, dp = \frac{1}{2}d(q\sin 2p) \end{cases}$$

より

$$pdq - PdQ = d\left(pq - \frac{1}{2}q\sin 2p\right)$$

となる. よって

$$\boxed{\begin{aligned} F &= pq - \tfrac{1}{2}q\sin 2p \\ H' &= H \end{aligned}}$$

となっている.