4-5 Hamilton-Jacobi 方程式

Hamilton-Jacobi の方程式

↑

Hamilton 方程式から求まる

- <u>何故重要</u>?

↖ Schrödinger 方程式(量子力学)の

準古典近似として求まる

[ħ の展開]

ħ の 0 次項が Hamilton-Jacobi 方程式

(a) Hamilton-Jacobi 方程式

作用は $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q\dot{q})dt$

ここで $t_2 \Rightarrow t$ として S を変数と考える.

$$\boxed{S(t) = \int_{t_1}^{t} L(q,\dot{q})\,dt'}$$

この時

$$\underline{\frac{dS}{dt} = L(q,\dot{q}) = p\dot{q} - H(p,q)}$$

よって

$$\boxed{dS = p\,dq - H\,dt}$$ とする.

一方 微分の公式は

$$\boxed{dS = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt}$$ である. よって比較すると

$$\boxed{p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}}$$ が求まる

これより

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ の場合 $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ より

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V(q) = 0}$$

Hamilton-Jacobi 方程式 となり

E を定数として $S = -Et + S_0(q)$ とすると

$$\boxed{E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)^2 + V(q)}$$ とも書ける

(b) 新しい母関数 Φ

$$\boxed{\Phi \equiv F + PQ}$$ を導入する

この時 $dF = p\,dq - P\,dQ + (H' - H)\,dt$

$= d\Phi - P\,dQ - Q\,dP$ よって

$$\boxed{d\Phi = p\,dq + Q\,dP + (H' - H)\,dt}$$ となる

一方微分の公式は

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial q}dq + \frac{\partial \Phi}{\partial P}dP + \frac{\partial \Phi}{\partial t}dt$$

比較すると

$$\boxed{p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

[[作用と Φ]] $\Phi = S$ となっている.

よって $$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \quad H' = 0$$

(P, Q を定数に選ぶ)

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = 0$$ より

(c) 例題 ： 調和振動子

$$\underline{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}$$

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q}$$ より

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E$$

$$\therefore \underline{S_0 = \int \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right)}\, dq}$$

ここで $\begin{cases} S = -Et + S_0 \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} \end{cases}$ だから

$P = E$ (定数)　　$Q = \alpha$ (定数) とすると

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{E - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2}}$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1}\left(\frac{q}{q_0}\right)$$ (q_0 は定数)

よって

$$\boxed{q = q_0 \sin(\omega t + \omega\alpha)}$$ となる。

No.

Date

(d) Schrödinger方程式とHamilton-Jacobi方程式

Schrödinger方程式：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V\psi=E\psi$$

ここで $\boxed{\psi = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(S_0+\hbar S_1+\cdots)}}$

とおいて $\hbar$ で展開すると

[$\hbar$ の0次]

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+V=E}$$

(Hamilton-Jacobi方程式)

[$\hbar$ の1次]

埋古典近似の式が

求められる.