No.

Date

55

5-2 角運動量の保存

(a) ポテンシャル U が $\underline{U = U(r)}$ のとき

$r = |\mathbf{r}|$

$$\boxed{\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}}$$

は保存する

(証)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}}_{=0} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U = -\frac{1}{r}\frac{dU}{dr} \cdot \mathbf{r}$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{r} \times \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right)\mathbf{r} = 0$$

$\mathbf{L}$ は保存する

◦ 力 $\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dU}{dr}$ を中心力という

(b) 対称性の方法: 空間回転による不変性

回転 $\Longleftrightarrow$ 角運動量

• z-軸の回転

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

今 $|\theta| \ll 1$ (微小回転とする)

この時

$$\begin{cases} x' \simeq x - y\theta \\ y' \simeq y + x\theta \\ z' \simeq z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - \dot{y}\theta \\ \dot{y}' = \dot{y} + \dot{x}\theta \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases}$$

この時, $\boxed{(\mathbf{r}')^2 = \mathbf{r}^2}$

系として $\underline{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)}$ を考える

この時，Lは回転に対して不変．よって

$$\delta S = \int \left[L(x', \dot{x}', y', \dot{y}', z', \dot{z}') - L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) \right] \times dt$$

$$= \int \left[L(x - y\theta, \dot{x} - \dot{y}\theta, y + x\theta, \dot{y} + \dot{x}\theta, z, \dot{z}) - L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) \right] dt$$

θが十分小さいので展開すると

$$\delta S = \int \left[-\frac{\partial L}{\partial x}(y\theta) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{y}\theta) + \frac{\partial L}{\partial y} x\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x}\theta \right] dt$$

ここで Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$ を用いると

$$\delta S = \int \left[-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) y\theta - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y}\theta + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) x\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x}\theta \right] dt$$

$$= \int \left[-\frac{d}{dt}\left(y \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d}{dt}\left(x \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) \right] \theta \, dt = 0$$

よって $\boxed{\frac{d}{dt}\left(x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$ となる.

ところが $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ より

$\boxed{m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{定数}}$ が示された.

ここで $L_z = (\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ だから

$L_z = \text{一定}$ となる.

$\Downarrow$

角運動量保存が示された.

(x, y 軸回転も同じ)