5-3 Kepler 問題

地球の公転運動

$$\begin{cases} \text{太陽の質量} & M_{\odot} \simeq 2\times10^{30}\,\mathrm{kg} \\ \text{地球の質量} & m \simeq 6\times10^{24}\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

⇓ 太陽は動かないに等しいとみなし

1体問題とする

- ポテンシャル

$$\boxed{U(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

(重力ポテンシャル)

⇓

角運動量は保存する

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = 0$$

よって $\mathbb{L}$ の方向をz-軸とする

この時運動は平面 ⟸ $\mathbb{r}\cdot\mathbb{L} = \mathbb{r}\cdot\mathbb{r}\times m\dot{\mathbb{r}}$
$= 0$ より

$\mathbb{r}$ と $\mathbb{L}$ は直交する

【地球の運動】

$$\underline{L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{GMm}{r}}$$

よって

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$$

Lagrange 方程式

r」 $\displaystyle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$ $\quad \therefore \underline{m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}}$

θ」 $\displaystyle \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ $\quad \therefore \underline{\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0}$

$$\boxed{l = m r^2 \dot{\theta}} \quad (一定)$$

簡単化のため $\boxed{\alpha \equiv GMm}$ とする

$\displaystyle \dot{\theta} = \frac{l}{m r^2}$ より

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$\dot{r}$ をかけてエネルギー積分をすると

$$m \dot{r} \ddot{r} - \frac{\dot{r} l^2}{m r^3} + \frac{\dot{r} \alpha}{r^2} = 0$$

よって

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha}{r}\right)=0$$

よって

$$\boxed{E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r}}$$ となる.

このエネルギー E は積分定数

↓

[初期条件で決まる]

(量子力学だとエネルギーは固有値となる)

6/

(1) 軌道は楕円（第1法則）

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} & \text{（エネルギー保存）} \\ l = mr^2\dot{\theta} & \text{（角運動保存）} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}\right)} \\ \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \end{cases}$$

よって

$$\underline{\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{mr^2}{l}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}\right)}}$$

となる。

書き直すと

$$\frac{\frac{1}{r^2}dr}{\frac{m}{l}\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2r^2} + \frac{2\alpha}{mr}}} = d\theta$$

ここで $\boxed{s = \frac{1}{r}}$ とおきかえると簡単になる

$ds = -\frac{1}{r^2}dr$ より

$$\boxed{\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - s^2 + \frac{2m\alpha}{l^2}s}} = -\int d\theta}$$

となる。

$$= -\theta + \theta_0$$ とおく

• 積分 $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}+\frac{2m\alpha}{l^2}s-s^2}}$ の計算法

(1) ルートの中は s の2次式．よって

$$\frac{2mE}{l^2}+\frac{2m\alpha}{l^2}s-s^2=(s-s_1)(s_2-s)$$

と因数分解する

但し
$$\begin{cases} s_1=\dfrac{m\alpha}{l^2}-\sqrt{\left(\dfrac{m\alpha}{l^2}\right)^2+\dfrac{2mE}{l^2}} \\ s_2=\dfrac{m\alpha}{l^2}+\sqrt{\left(\dfrac{m\alpha}{l^2}\right)^2+\dfrac{2mE}{l^2}} \end{cases}$$

(2) 積分： $\boxed{s=s_1+(s_2-s_1)\sin^2\psi}$ とおきかえると解ける．

$$ds=2(s_2-s_1)\sin\psi\cos\psi\,d\psi$$ だから

$$\int\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}}=\int\frac{2(s_2-s_1)\sin\psi\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{(s_2-s_1)^2\sin^2\psi\cos^2\psi}}$$

$$=2\psi \quad //$$

これより $\boxed{-\theta+\theta_0=2\psi}$ となる．

$s = \frac{1}{r}$ だから　$\psi = \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)$ を用いると

$$\frac{1}{r} = s = s_1 + (s_2 - s_1)\sin^2\psi$$

$$= s_1 + (s_2 - s_1)\sin^2\frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)$$

$$= s_1 + \frac{1}{2}(s_2 - s_1)(1 - \cos(\theta_0 - \theta))$$

よって s_1 と s_2 の式を代入すると

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{l^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}}\cos(\theta - \theta_0)}$$

となる。

θ_0 は任意定数。よって $\theta_0 = \pi$ ととる

また

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\alpha^2}} \\ A &\equiv \frac{l^2}{m\alpha} \end{aligned}}$$

と定義すると

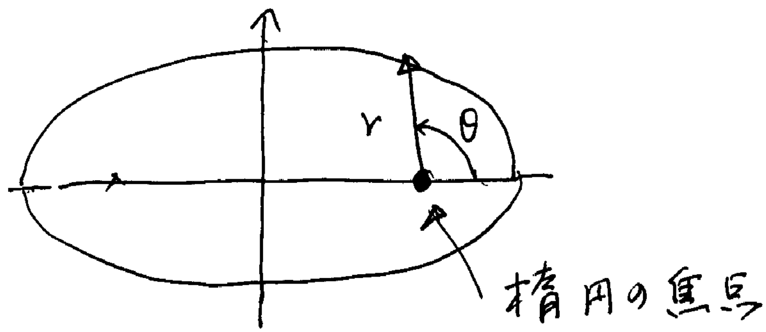
$$\boxed{r = \frac{A}{1 + \varepsilon\cos\theta}}$$

となる。

これより　$E < 0$　であれば軌道は

楕円

(2) 面積速度が一定（第2法則）



微小面積 $\boxed{\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta}$

⇓ 面積速度は

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\boxed{\dot{S} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}}$$

ところが角運動量 l は

$$l = m r^2 \dot{\theta} = \text{一定}$$

よって $\boxed{\dot{S} = \frac{l}{2m} = \text{一定}}$ となる。

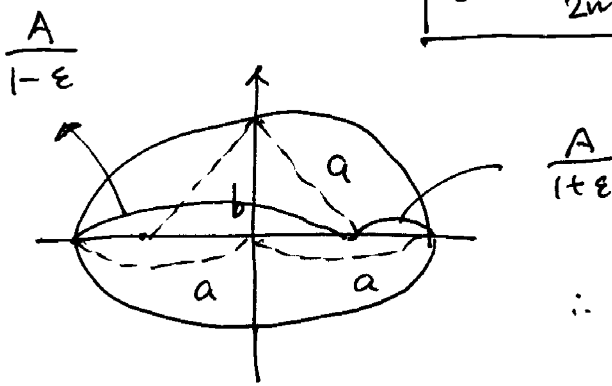
(3) 第3法則（周期Tの2乗が長半径aの3乗に比例）

周期 T : $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{l}{2m}$ より

$$S = \int_0^T \frac{dS}{dt}\,dt = \frac{l}{2m}\int_0^T dt = \frac{l}{2m}T$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{l}{2m}T}$$

（1周するとそれが面積となる）



$$\therefore \boxed{2a = \frac{A}{1+\varepsilon} + \frac{A}{1-\varepsilon}}$$

$r = \dfrac{A}{1+\varepsilon\cos\theta}$ より

$$\begin{cases} a = \dfrac{A}{1-\varepsilon^2} \\ b = \dfrac{A}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{cases}$$ これより

楕円の面積 S :

$$\underset{\frac{l}{2m}T}{\overset{\shortparallel}{S}} = \pi ab = \pi A^2 \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi\sqrt{A}\,a^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \boxed{T^2 \propto a^3}$$