# 5-4 付加重力ポテンシャル (付録) 66

◎ 公転周期の遅み

Newton 力学 : 重力ポテンシャル

$$\boxed{V(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

[最近の研究] 付加重力ポテンシャルの存在

$$\boxed{V(r) = -\frac{GMm}{r} + \underbrace{\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{GMm}{r}\right)^2}_{\text{相対論的効果による項}}}$$

c : 光速

◎ Newton 方程式 :

$$\boxed{m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{G^2M^2m}{c^2r^3}}$$

となる.

(新しい重力項)

$$L^2 \equiv l^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}$$ を導入すると

Newton 方程式 は

$$\begin{cases} m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \\ l = mr^2\dot{\theta} \end{cases}$$

となる

$\Downarrow$ これは簡単に解ける.

$$\boxed{r = \frac{A}{1+\varepsilon\cos\left(\frac{L}{l}\varphi\right)}}$$

となる.

但し

$$\begin{cases} A = \frac{L^2}{GMm^2} \\ L^2 = l^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2} \\ \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{m(GMm)^2}} \end{cases}$$

{ この軌道は楕円
但し閉じていない!! }

No.

Date

# A. Newton力学における観測量 

観測量は 周期

$$l = mr\dot{\varphi} \quad \text{より} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\therefore \int_0^T \frac{l}{m}\,dt = \int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi$$

$$\therefore \frac{l}{m}T = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{L}{l}\varphi\right)\right)^2}$$

但し

$$\begin{cases} r = \dfrac{A}{1+\varepsilon\cos\left(\frac{L}{l}\varphi\right)} \\ A = \dfrac{L^2}{GMm^2}, \quad \omega = \dfrac{l}{mR^2} \\ R = \dfrac{l^2}{GMm^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}} \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} L^2 = l^2(1+\eta) \\ \eta \equiv \dfrac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \ll 1 \end{cases}$$

大雑把にいって

$\eta \simeq 10^{-8}$ の大きさ

(地球の公転, 水星の公転の場合)

## B. 積分



$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)\right)^2}$$

$$\frac{L}{\ell} = \sqrt{1+\eta} \approx 1+\frac{1}{2}\eta \qquad (\eta \ll 1 \text{ より})$$

よって

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\eta\varphi\right)\right)^2}$$

$$\approx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+\varepsilon\cos\varphi-\frac{1}{2}\eta\varepsilon\varphi\sin\varphi\right)^2}$$

$$\approx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} + \int_0^{2\pi} \frac{\eta\varepsilon\varphi\sin\varphi\, d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^3}$$

よって

$$\underline{I \simeq 2\pi(1-\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}} + 2\pi\left(-\eta\varepsilon+\frac{3}{4}\varepsilon^2\eta+\cdots\right)}$$

と求まる。これを書き直すと

$$\boxed{I = 2\pi(1-\varepsilon^2)^{-\frac{3}{2}}\left[1-\eta\varepsilon+\cdots\right]}$$

である。但し、($\varepsilon \ll 1$ と仮定した)

## C. 周期



周期 $T$ は

$$T = \frac{m}{l} A^2 I$$

$$T \simeq \frac{m}{l} \cdot \frac{l^4}{(GMm^2)^2} (1+2\eta) \cdot \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} (1-\eta\varepsilon)$$

Kepler 問題では 周期 $T_0$ は

$$T_0 = \frac{m}{l} \frac{l^4}{(GMm^2)^2} \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$ であった。

よって

$$T = T_0 (1-\eta\varepsilon)(1+2\eta)$$

$$\boxed{T \simeq T_0 (1 + (2-\varepsilon)\eta + \cdots)}$$

となっている

$T_0 \omega = 2\pi$ であるから

$$\omega T \simeq 2\pi (1 + (2-\varepsilon)\eta + \cdots)$$

とも書ける。

Newton 方程式からのズレは

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} = (2-\varepsilon)\eta} \quad \left(\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2}\right)$$

## D、観測量との比較



(1) 水星の近日点移動（進み）

・観測値：
$$\delta\theta \simeq \frac{43}{3600} \times \frac{1}{360} \times \frac{0.24}{100}$$
$$\boxed{\delta\theta \simeq 8.0 \times 10^{-8}}$$

・理論値：
$$\begin{cases} R = 5.73 \times 10^{10}\,\mathrm{m} \\ M = 1.989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}\ (\text{太陽}) \\ \omega = 8.3 \times 10^{-7} \end{cases}$$

$$\therefore\ \eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} = 2.65 \times 10^{-8}$$

よって

$$\boxed{\delta\theta_{\text{振}} = 4.8 \times 10^{-8}}$$

非常によく合っている!!

(2) GPS衛星の遅れ

軍事衛星のため詳細なデータが少ない!

・観測値 : $\boxed{\frac{\Delta T}{T} \simeq 4.5 \times 10^{-10}}$

・理論値 : 衛星は1日に2周

$$\begin{cases} \omega \simeq 1.454 \times 10^{-4} \\ R \simeq 2.656 \times 10^{-7} \ m \\ M \simeq 5.974 \times 10^{24} \ kg \ (\text{地球}) \end{cases}$$

よって $\eta \simeq 1.69 \times 10^{-9}$

$$\therefore \boxed{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{theory} \simeq 3.4 \times 10^{-10}}$$

よく合ってる!!

(3) 地球の公転の遅れ

うるう秒 ⇒ 遅れとして観測される

・観測値： 1972年6月から2008年12月まで

36.5年間に23秒の遅れ

よって 1年間では

$$\boxed{\Delta T \simeq 0.63 \text{ 秒/年}}$$

・理論値： $\begin{cases} R \simeq 1.496 \times 10^{11} \text{ m} \\ M \simeq 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} \ (\text{太陽}) \\ \omega \simeq 1.99 \times 10^{-7} \end{cases}$

よって $\eta = \dfrac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} = 0.992 \times 10^{-8}$

よって 一年間では

$$\boxed{(\Delta T)_{theory} = 0.621 \text{ 秒/年}}$$

となり完全に一致している.