6-2 ベクトルポテンシャル

Maxwell方程式： ρ と j は与えられる

↓

この時，E と B が解として求まる

→ (A_0, A) の導入

{ 電子と電磁場の相互作用を考える時にどうしても必要 }

(a) ベクトルポテンシャル A の導入

$\nabla \cdot B = 0$ なので

$\boxed{B = \nabla \times A}$ とすればよい

$\left(\nabla \cdot B = \nabla \cdot \nabla \times A = \nabla \times \nabla \cdot A = 0 \right)$

【重要】 $\nabla \cdot B$ を解いたのに変数の自由度は減っていない

$\begin{cases} B & (3個) \\ A & (3個) \end{cases}$

⇝ ゲージ自由度

(b) Faraday の法則 → A_0 の導入

$\nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$ に $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$ を代入すると

$\nabla \times \left(\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \right) = 0$ となる。よって

$\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = -\nabla A_0$ とおくと

Faraday の法則は常にみたされる。

【ゲージ不変性】

$$\begin{cases} \mathbb{E} = -\nabla A_0 - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \\ \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \end{cases}$$

ここで $\begin{cases} \mathbb{A} = \mathbb{A}' + \nabla \chi_{(r,t)} \\ A_0 = A_0' - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$ として も $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$ は $\chi_{(r,t)}$ によらない。

(証)
$$\begin{cases} \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = \nabla \times \mathbb{A}' + \nabla \times \nabla \chi = \nabla \times \mathbb{A}' \\ \mathbb{E} = -\nabla A_0 - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = -\nabla A_0' + \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \chi - \dfrac{\partial \mathbb{A}'}{\partial t} - \nabla \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

$$= -\nabla A_0' - \dfrac{\partial \mathbb{A}'}{\partial t}$$

$\chi_{(r,t)}$ によらない!!