6-3 電子と電磁場の相互作用

- 自由電子の Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$$

↓ 電子が電磁場と相互作用するときは？

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - A_0)}$$

とする。

$(\mathbf{A}, A_0)$: ベクトルポテンシャル
(4次元の)

◎ 何故、この形であるか？

1. 実験と合っている
2. ゲージ不変を要求すると
   この形に決まる。(但し e は定数)

(注) e (電荷) は 相互作用の強さを
あらわしている。

【ゲージ不変性】

$$\begin{cases} \mathbb{A} = \mathbb{A}' + \nabla\chi \\ A_0 = A_0' - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

と変換したとき系のLagrangianがχによらない

○ $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e(\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A} - A_0)$

をゲージ変換すると

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e(\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A}' - A_0')$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e(\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A} - A_0) - e\left(\dot{\mathbb{r}}\cdot\nabla\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

ところが $\frac{d\chi(\mathbb{r},t)}{dt} = \nabla\chi\cdot\dot{\mathbb{r}} + \frac{\partial\chi}{\partial t}$ だから

$$\boxed{L' = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e(\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A} - A_0) - e\frac{d\chi}{dt}}$$ となる.

$\frac{d\chi}{dt}$ の項： Lagrange方程式には影響しない!!

(註) $S = \int_{t_1}^{t_2}\left(L_0 + \frac{df}{dt}\right)dt$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L_0\, dt + (\text{定数項})$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L_0\, dt = 0$$