6-4 電磁場中の電子の運動

電子が電磁場の中で
どういう運動をするか？

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbb{r}}^2 + e(\dot{\mathbb{r}} \cdot \mathbb{A} - A_0)}$$

である。

- 運動方程式: x 成分のみ計算する

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \bullet \ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + e\left[\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \dfrac{\partial A_x}{\partial t}\right] \\ \bullet \ \dfrac{\partial L}{\partial x} = e\left(\dot{x}\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\dfrac{\partial A_z}{\partial x} - \dfrac{\partial A_0}{\partial x}\right) \end{cases}$$

よって Lagrange 方程式は

$$m\ddot{x} + e\left[\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right]$$
$$= e\left[\cancel{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_0}{\partial x}\right]$$

これを整理すると

$$m\ddot{x} = e\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right]$$

ここで
$$\begin{cases} \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \\ \mathbb{E} = -\nabla A_0 - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \end{cases}$$
を用いると

$$m\ddot{x} = e(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y + E_x)$$
$$= e(\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{B})_x + eE_x$$

すなわち

$$\boxed{m\ddot{\mathbb{r}} = e\,\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{B} + e\,\mathbb{E}}$$

となる。

(Lorentz 力)

【一様磁場中の運動】

z-軸方向に一様磁場

$$\mathbb{B} = (0,\ 0,\ B) \qquad (B\text{は定数})$$

この時の電子の運動:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbb{B}$$

$$\therefore \begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -eB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ これは自由粒子の運動
ここでは省略

$\ddot{y} = -\frac{eB}{m}\dot{x}$ を1回積分すると

$$\underline{\dot{y} = -\frac{eB}{m}x + C_0}$$

となる
(C_0は定数)

これを $m\ddot{x} = eB\dot{y}$ の式に代入すると

$$\therefore \boxed{\ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = \frac{eB}{m}C_0}$$

となる.

ここで $\boxed{\omega \equiv \frac{eB}{m}}$ を導入する

(Larmor 振動数という)

運動方程式は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega C_0}{m}$$

[解法] $X = x - \dfrac{C_0}{m\omega}$ とおくと

$$\underline{\ddot{X} + \omega^2 X = 0}$$ となる

この一般解は

$$\boxed{X = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t}$$

$\Downarrow$ よって

$$\boxed{x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t + \frac{C_0}{m\omega}}$$

y もすぐに解けて

$$\boxed{y = A_1 \cos\omega t - A_2 \sin\omega t + C_1}$$ となる

(C_1 は定数)

定数を適当に選んで

$$\boxed{\begin{aligned} x - x_0 &= A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t \\ y - y_0 &= A_1 \cos\omega t - A_2 \sin\omega t \end{aligned}}$$

と書ける．（x_0, y_0 は定数）

このように

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = A_1^2 + A_2^2 \equiv R^2$$

半径 R の円運動をしている

◎ 円運動の周期 T：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}}$$

（注）この円運動をしている電子は

エネルギーロスがない