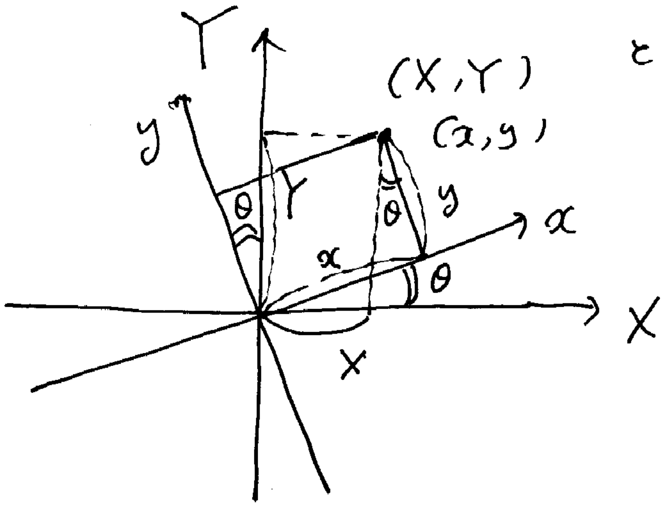
No.

Date

7-2 座標系の回転

$$\begin{cases} \text{静止系の座標} & (X, Y, Z) \equiv \mathbb{R} \\ \text{回転系の座標} & (x, y, z) \equiv \mathbb{r} \end{cases}$$

とする



図より

$$\begin{cases} x = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ y = Y\cos\theta - X\sin\theta \end{cases}$$ である

よって

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv A \text{ と書く}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$ は直交行列

$$\boxed{AA^t = 1}$$

よって

$$\begin{cases} \mathbb{r} = A\mathbb{R} \\ \mathbb{R} = A^t \mathbb{r} \end{cases}$$ である

ここで時間で微分すると

$$\dot{\mathbb{r}} = A\dot{\mathbb{R}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\dot\theta\sin\theta & \dot\theta\cos\theta & 0 \\ -\dot\theta\cos\theta & -\dot\theta\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbb{R}}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\dot\theta\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \cancel{+}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^t \mathbb{r}}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\dot\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbb{r}}$$

$$\parallel$$

$$-\omega \times \mathbb{r}$$

但し $\underbrace{\omega \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}}$ とした

よって $\boxed{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = A^t \dot{\mathbf{R}}}$ が示された。

ここで

$$(A^t \dot{\mathbf{R}})^2 = \dot{\mathbf{R}}^2$$ であるから

質量 m の質点の運動エネルギーは

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}$$

となる。