

## 第6章 新しい重力理論

物理学においては運動学と動力学という二つの理論形式がある．このどちらも重要であるが，役割は本質的に異なっている．その一つ目の運動学(キネマティクス)では粒子の運動の性質(エネルギー・運動量の保存や様々な対称性)を運動学的に決定している．特に粒子の運動エネルギーや運動量がどのようになっているかを知る事はその物理を理解するための基本であり，これが粒子の振る舞いを記述する上で重要な要素となっている．一方，もう一つの動力学(ダイナミクス)は，粒子の運動を決める最も重要な方程式から成り立っており，この方程式を解く事により粒子の力学が決定されている．この場合，記述しようとする物理現象によってその方程式は異なり，それに応じて相互作用も選ぶ必要がある．このため，どの運動にはどの相互作用が働いているのかを見極めて，それに応じた運動方程式を解く事によってその粒子が関係する様々な自然現象を理解することができる．

- 一般相対論の役割： それでは重力場における動力学の方程式は何であろうか？これは基本的にはNewton 方程式である．この時さらなる疑問が湧いてくる。「一般相対論の役割」は何であろうか？これは時間・空間の計量を変化させるという方程式なので，どちらかと言えば運動学に近いと言える．しかし粒子の状態やそのLagrangian とは直接の関係はないので，運動学でもない．ところが粒子のダイナミクスとはさらに関係がないため，物理において一般相対論が果たすべき役割が実は不明である．従って，一般相対論が存在しなくても，理論体系に対する影響はとくにないものと考えてよい．このことを読者もしっかりと理解し認識しておく必要がある．ここで大切な事は，重力場がある場合，高エネルギー粒子の動力学はどうなっているのかと言う極めて基本的で単純な疑問に答える事であり，以下，その議論を進めて行きたい．

## 6.1 Dirac 方程式とポテンシャル

現在知られている基本的な相互作用は電磁氣的な力，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．力の強さを示す結合定数という言葉でいうと，重力は最も弱い．実際，弱い相互作用と比べても重力は30桁以上も小さい．重力の次に弱いのが弱い相互作用である．この力は，中性子が  $\beta$  崩壊する時や  $\pi$  中間子が崩壊してミューオンとニュートリノになって行く過程を記述する事ができる．これらの相互作用と比べると，電磁氣的な力はかなり強い相互作用であると言える．実際，我々の物質の世界は基本的には電磁氣的な力で支配されている．原子や分子が出来ているのも，全て電磁氣的な力である．最後に，最も強い力として強い相互作用があり，これは原子力エネルギーや太陽のエネルギー源になっている．星の内部で起こっている核融合はまさに強い相互作用による核子間の束縛エネルギーをうまく利用する事により得られている．

- 重力の影響は何故，大きいのか？： 重力は星の生成に大きな影響を与えているが，それは何故であろうか？重力は力の強さとしては一番弱いのであるが，しかしながら2つの重要な性質のために，大きな影響を星の形成では発揮する事になるのである．その2つの性質とは，力の到達距離が  $\frac{1}{r}$  である事および常に引力である事である．特に，重力は常にどんな場合でも引力であり，おまけにその力は遠距離まで及ぼすため，いずれは全ての核子は引き寄せられて星を形成して行く事になっている．

- 相対論的な粒子： 粒子が高エネルギーになると相対論的な粒子の運動を重力場の中で考える必要がある．しかし高エネルギー粒子の運動は Newton 方程式では記述できないことが知られているため，何かこれにかわる方程式が必要である．古典力学の方程式は量子論から近似的に得られることがわかっているので，相対論的な粒子の運動を重力場中で考えるためには，どうしても Dirac 方程式から出発する必要がある．ところがこの重力ポテンシャルを Dirac 方程式のどの部分に入れたら良いのかという基本的な問題がこれまで未解決のままであった．この事は1970年の始め頃までは深刻な問題として人々の興味を引いていたが，その後，議論が完全に途絶えてしまった．その主な原因は一般相対論への過大評価であろう．ところが，一般相対論は粒子の運動に対する方程式ではなく，さらに場に対する方程式でもないため，動力学とは無関係であった．従って重力ポテンシャルを場の理論の枠組みの中に入れる事が，結局，現代物理の最も重要な課題である事は当然であった．しかしながらこの課題の解決が最近まで行われていなかったことも事実である．

## 6.2 重力問題の方向性

ここで問題を整理してみよう。まず，Newton 力学では重力がある場合の方程式は良くわかっていて，実際，Kepler の法則にしても重力下での Newton 方程式を解けば問題なく理解されている。そしてその Newton 方程式はどのように導かれるのかというと，これはよく知られているように Schrödinger 方程式からきちんと導かれるものである。Schrödinger 方程式は場に対する方程式であるから，Newton 方程式を導くには何らかの近似をする必要がある。直感的にわかりやすいのは Ehrenfest の定理として知られているように，演算子（座標と運動量）の期待値を取る事である。この手法により，Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導かれている。そして Schrödinger 方程式は非相対論の近似をすれば Dirac 方程式から求められる事から，結局，Dirac 方程式から，Newton 方程式が導かれる事を意味している。

### 6.2.1 Dirac 方程式と重力ポテンシャル

逆に言えば，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れられないとしたら，それは最もよく知られている重力ポテンシャルの場合の Newton 方程式が求められない事を意味している。この事より，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れた方程式を考えるのは一番最初にされるべき最も重要な事である。この問題が未解決のまま重力の問題が議論されてきたために，重力問題の解決に対する正しい方向性を見失ってしまったと言える。恐らく，1960年代の多くの物理屋はこの問題をかなり深刻に考えていたと思われるが，ゲージ理論をあまりにも重要視されすぎたため，重力をゲージ理論以外で研究する方向はすべて退けられてしまったものであろう。

• クーロン場の Dirac 方程式： 重力ポテンシャル中の Dirac 方程式を議論する前に，クーロンポテンシャル  $V_c(r) = -\frac{Ze^2}{r}$  中の質点（質量  $m$ ）に対する Dirac 方程式を書くと

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right) \Psi = E\Psi \quad (6.1)$$

となっている。一方，重力ポテンシャル  $V(r) = -\frac{G_0mM}{r}$  の場合，もしクーロンと同じだとすると，式 (6.1) と同様に

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{G_0mM}{r}\right) \Psi = E\Psi \quad (6.2)$$

と書くことになる．しかしこの式はゲージ理論からきているため常に引力であるという保証をすることはできない．また，この場合に非相対論の極限をとって Newton 方程式を求めても，クーロンと同じで影響は全く現れない．

- 重力場の Dirac 方程式： 実際問題として正しい方程式は

$$\left[ -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left( m - \frac{G_0 m M}{r} \right) \beta \right] \Psi = E \Psi \quad (6.3)$$

であることが最近の研究によりわかっている．この場合，非相対論の極限をとると新しいポテンシャルが続々と現れてくる．そのうちの一つが重力付加ポテンシャルとなっている．しかしながら，これまでこのような重要な問題を未解決のまま放置していた事自体が，実は最も深刻な問題であると言える．

### 6.2.2 スカラー場によるポテンシャル

後で詳しく議論するように，新しい重力理論(式(6.6))によって，式(6.3)の Dirac 方程式が導出されている．すなわち，電磁場の場合とは異なっていたのである．この事は水星の近日点移動の問題を取り扱う時に，重大な効果を引き起こす事になる．それはクーロンポテンシャルの場合，非相対論の極限をとっても全く影響する事はなかったが，スカラーポテンシャルとして入ってくると，非相対論の極限において重力の付加ポテンシャルを新しく生み出すことになっている．これはベクトルポテンシャルによる Zeeman 効果の場合と同じ機構である．

- 慣性質量と重力質量の等価性： 重力に関する観測量として「慣性質量  $m$  と重力質量  $m$  の等価性」という非常に重要な物理量がある．この等価性は一般相対論の一つの根拠になったものであるが，そこでは仮定されており，導出はされていない．一方，新しい重力理論においては，この等価性が自然な形で証明されており，この理論が信頼される重要な理由の一つとなっている．
- 繰り込み理論： 何故，スカラー場によって重力相互作用がうまく記述されるのかと言う問題はかなり難しく，実は繰り込み理論と密接に関係している．実際，この繰り込み理論を深く理解することが，この新しい重力理論を理解するための必須条件となっている．しかしこの繰り込み理論の解説はこの本では不可能なので，参考文献 [3] を読み進めて理解して頂きたいと思う．

## 6.3 新しい重力理論

重力の量子論を作るという事は物理的には何を意味しているのかをまず考える必要がある。最も基本的な意味は明らかである。それは、まずは、重力ポテンシャルがある時の Dirac 方程式をどのように書けるかという事である。これがすべての出発点になる。逆に言えば、これさえも出来なかつたら、それ以上の重力理論を考える物理的な意味は無い。

現在良く使われている量子重力は重力場の量子化という意味を含み、そちらの方がより本質的であると考えている物理屋が多いように見受けられる。ところが、一般相対論は重力場に対する方程式ではなく、計量テンソルに対する方程式であり、そもそもその物理的な意味が不明である。さらに、一般相対論は動力学を記述する方程式とは無関係なため、重力場の下で運動する粒子の記述には無力である。まずは量子重力に関してその物理を明確にして行こう。そしてそのためには、粒子間の重力ポテンシャルを与える Lagrangian 密度を求めて、この Lagrangian 密度からの Lagrange 方程式から重力ポテンシャル中の粒子の運動を記述する Dirac 方程式を求めるという事が重力の問題を解くための最も重要な課題となっている。さらには、重力ポテンシャル中での新しい Dirac 方程式が求められた事に対して、その非相対論的な極限の方程式を求め、それを古典力学の方程式に持って行く作業を実行する必要がある。実際、このようにして Newton 方程式を求めたところ、新しい重力として付加ポテンシャルを含めた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (6.4)$$

と求められる。この第2項である重力付加ポテンシャルが地球の公転によるう秒の是正の問題を高精度で解決している。また、この重力付加ポテンシャルは長い間、Newton 方程式のなかで議論されてきた重力ポテンシャルを修正した新しいポテンシャルとなり、これは19世紀半ば以来の変更と言えるものと考えられる。

- 大雑把な大きさの評価： 歴史的に言って相対論的效果を最初に具体的に検証したのは、Michelson-Morley の実験である。この場合、地球上で観測できる最も速いものは地球の公転速度であり、Michelson-Morley はこれを利用して光の速度が地球の公転速度の影響をどのように受けるかを検証したわけである。結果は良く知られているように、光速は地球の公転速度の影響を受けていな

く、光速不変の法則へと発展して行くのである。この時の相対論的效果は

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \quad (6.5)$$

である事が光速  $c$  と地球の公転速度  $v$  を入れれば求められる。一方、地球の公転によるうるう秒の効果 ( $\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$ ) も、ともに丁度、相対論的效果の大きさそのものである。従って、直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は、至極当然の事と納得できるものである。

### 6.3.1 重力を含む Lagrangian 密度

重力を入れた理論を考える時、当然の事として、最も信頼されている量子電磁力学の理論体系に何とかこの重力の相互作用を組み入れる事が自然な事である。この場合、出発点として重要な事は、重力場を考える場合、これはゲージ理論では不可能であるという事である。その理由は簡単で、ゲージ理論だとその理論が持っている特性として、粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまい引力だけが必要な重力理論には適していない。それでは重力場はどんな場であつたら常に引力を与えるのであろうか？実はこの事は周知の事実である。重力の場が「スカラー場」であれば、その場を媒介とした相互作用は常に引力になっている。

• 具体的な Lagrangian 密度： ここで、具体的な Lagrangian 密度を書いておこう。質量  $m$  を持つ質点  $\psi$  が電磁場  $A_\mu$  と重力場  $\mathcal{G}$  と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \quad (6.6)$$

と与えられている。ここで  $\mathcal{G}$  は質量のないスカラー場となっている。それでは人々は何故このスカラー場による重力を考えなかったのだろうか？その答えは、恐らくは、スカラー場だと、繰り込みが出来ないと思い込んでいた事が主因であらうと思われる。

• 重力場はゲージ理論では不可能！： この数十年間、人々は基本的な相互作用の形はゲージ理論であるべきであるという根拠のない「信奉」に振り回されていた。量子電磁力学による繰り込み理論が大きな成功を収めたため、量子電磁力学の基礎であるゲージ原理が本質的であると思い込んだ節がある。ゲージ

原理自体は単に数学的なものであり、確かに物理にそれを応用して、特に量子電磁力学では予想以上に上手く行っている。しかしゲージ理論だとその力には引力と斥力が常に現れるため、引力だけの重力の記述にこのゲージ理論は応用できないため、その他の理論を考えるべきであることは、自明でもあった。

### 6.3.2 重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると、重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる。この方程式は時間によっている方程式になっているが、外場である物質場が時間によらない場合は、一般に静的近似をする事が出来る。この場合、重力場  $\mathcal{G}_0$  に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g \quad (6.7)$$

と求められる。この時、 $m\rho_g$  は物質の密度に対応する。結合定数  $g$  は重力定数と  $G = \frac{g^2}{4\pi}$  により結びついている。これは、基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて、確かに観測されている重力場を再現できている。

### 6.3.3 重力場中の Dirac 方程式

上記の Lagrangian 密度から質量  $m$  の質点に対して、重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式は

$$\left[ -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta(1 + g\mathcal{G}) - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi \quad (6.8)$$

と求められる。ここで重力場が質量  $M$  の原子核によって作られる時は

$$\left[ -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left( m - \frac{GmM}{r} \right) \beta - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi \quad (6.9)$$

となり、前章で議論した重力場中の Dirac 方程式が得られている。これは非常に重要であり、基本的な Lagrangian 密度から質点に対する重力場下での Dirac 方程式が初めてしっかりと求められたことになっている。電子や陽子などの素粒子に対してこの重力場中の Dirac 方程式が重要になるような現象はそれ程無いかも知れない。可能性としては中性子星の表面での粒子の運動が相対論的になればあるいは必要になるかも知れない。しかし、後で見るように、この式を非相対論に直し、それを古典論に持って行くとこの時初めて重力場中の Newton 方程式が Dirac 方程式から矛盾無く求められた事になっている。

### 6.3.4 重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[ -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left( m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \right] \Psi = E\Psi \quad (6.10)$$

と求められた事より, その非相対論極限の方程式を求めて, それから新しい Newton 方程式を求める必要がある. この事により, 重力ポテンシャルも変更を受ける事になる. そして新しく求められた重力付加ポテンシャルが地球の公転における遅れ具合を 0.621 秒/年 と予言しているが, これははうろう秒として観測されてきた観測値 0.625 秒/年 とぴったり合うのである. さらに月の後退が観測されているが, 月の運動も当然, 重力付加ポテンシャルの影響を受けており, 実際, 月の後退の観測値が理論計算と良く一致している事がわかっている.

• Foldy-Wouthuysen 変換: 重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H = -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left( m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \quad (6.11)$$

で与えられる. この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して, 非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない. この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリ変換なので, 常に信頼できるものである. その結果だけ書くと,

$$H = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \quad (6.12)$$

となる. 興味があるのは, 古典近似をした後のポテンシャルなので, 因数分解仮説

$$\left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \right\rangle \langle \mathbf{p}^2 \rangle \quad (6.13)$$

は, 良い近似である. さらに, Virial 定理

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = -\langle V \rangle \quad (6.14)$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (6.15)$$



となる．第2項が新しい重力の補正項であり，Zeeman効果と導出が似ている．電磁場の場合，クーロン力ではこのような非相対論の極限で新しい項は出てこないが，重力はスカラーで入っているので，このような新しい項が現れたのである．電磁場の場合ベクトルポテンシャルの部分は非相対論の極限をとると新しい項が現れてくる事は良く知られているが，重力の補正項もこれと似ていて新しい項が現れてくるのである．

● 相対論的な Newton 方程式： 最近の研究(半澤・藤田論文)により，Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式が直接求められる事が分かっている．この結果だけを書いておこう．

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m}{E} \nabla \left( -G \frac{mM}{r} \right) \quad (6.16)$$

ここで  $E$  は粒子のエネルギーであり，この式は粒子が散乱状態の場合にのみ正しい式であり，束縛されている場合には使えないものである． $E$  は粒子のエネルギーであり  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  と書かれている．ここで  $E \simeq m$  と近似すると方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \simeq e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (6.17)$$

となり，通常重力ポテンシャルに対応している．もう少し近似を上げると非相対論の場合， $E = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots$  と展開されるため，重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルが現われる事がわかり，これは基本的には束縛状態の重力付加ポテンシャルに対応している．

## 6.4 新しい重力理論の予言

新しい重力理論が完成されて、その帰結として重力ポテンシャルに重力付加ポテンシャルがあらわれる事がわかっている。これは非常に小さい効果ではあるが、しかし実際の観測に掛かる程度の大きさである。この相対論的效果は大雑把に言って、地球の公転に対しては  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8}$  である事が光速  $c$  と地球の公転速度  $v$  を入れれば求められる。一方、地球の公転によるうるう秒の効果 ( $\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$ ) も、ともに丁度、相対論的效果の大きさそのものである。従って、直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は、至極当然の事と納得できるものである。

### 6.4.1 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

新しい重力理論においては、通常の重力ポテンシャルに加えて新しい重力付加ポテンシャルが導出されている。従って、回転物体（例えば地球）が重力中心（この場合、太陽）から受ける重力ポテンシャルは全体で

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r}\right)^2 \quad (6.18)$$

と書かれている [3]。右辺の第2項が重力付加ポテンシャルである。ここで  $G$  と  $c$  は重力定数と光速、 $M$  は重力中心の質量、そして  $m$  は回転物体の質量である。この場合の Newton 方程式はすぐに解くことができるのであるが、実はこの重力付加ポテンシャルは非可積分であることが知られている。この非可積分ポテンシャルは物理的には容認できない解を与える事が知られている。このためこのポテンシャルの取り扱いは摂動論的に実行する事が必要である。詳しい計算法は英語版である「Cosmology and Field Theory」に解説してあるので専門的に興味がある読者はそちらを参考にして欲しい。重力付加ポテンシャルの効果を摂動論的に考慮した場合の周期  $T$  は

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 + 2\eta\} \quad (6.19)$$

となる。ここで  $\eta$  は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (6.20)$$

と書かれている。この式で  $R$  は平均軌道半径、 $\omega$  は角速度で Newton 周期  $T$  と  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  と結びついている。この事より、重力付加ポテンシャルにより引き

起こされる効果として周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \quad (6.21)$$

である [2, 3] . 式 (6.21) の分母にでている  $T$  は Newton 周期と近似して十分である . この式より , 正しい周期が Newton 周期よりも常に大きくなっているの  
で運動は「周期の遅れ」に対応している .

#### 6.4.2 地球公転周期のズレ (うるう秒)

地球公転の場合 , 軌道半径  $R$  , 太陽の質量  $M$  それと角速度  $\omega$  はそれぞれ

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (6.22)$$

である . ポテンシャルによる周期のズレは

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$$

である . 従って 1 年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion} = 0.621 \text{ s/year} \quad (6.23)$$

だけ大きくなっているため , これは確かに遅れになっている . 従って , この事はうるう秒の補正が必要である事を示している . 実際 , うるう秒の補正は 1972 年 6 月から始まりこれまで 40 年間に 25 秒補正している . 従って 1 年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital \ Motion}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (6.24)$$

である . これは式 (6.23) の理論値と完全に一致している .

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずれているという事からきている [9] . すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり , これはそのままポテンシャルの影響そのものである事がわかる .

### 6.4.3 水星の近日点移動

水星の近日点移動の問題にも少し触れておこう．水星の近日点移動の観測値は1700年から1800年における100年間の近日点移動について行われたものとなっている．これは木星などの影響で確かに水星の近日点が移動する事は知られていた．しかし惑星効果の計算は Newcomb が1890年代に行ったものが知られているが、その計算の検証が実行された形跡はない．いずれにしても1周期における水星の近日点移動の観測値には任意性が大きすぎて科学的な議論は今後の検証によるものとなっている．理論的には1体問題である限りは、1周期における水星の近日点に変化する事はない事が証明されている．

### 6.4.4 月の後退

月も重力付加ポテンシャルの影響を受けている．ここでは、このズレの量が月の軌道の後退と関係している事を示し観測量と比較しよう．実際、月は1年間に3.8 cm 後退している事が観測されている．

月の軌道の場合もズレを表す式はおなじである．ここで  $\eta$  は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (6.25)$$

である．月の場合、軌道半径  $R$ 、地球の質量  $M$  それと角速度  $\omega$  はそれぞれ

$$R = 3.844 \times 10^8 \text{ m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad \omega = 2.725 \times 10^{-6} \quad (6.26)$$

である．これより

$$\frac{\Delta T}{T} = 2.14 \times 10^{-11} \quad (6.27)$$

となる．今、月がその軌道からどれだけずれるかの計算を行う．角度のズレの式は  $\Delta\theta = 2\pi(2 - \varepsilon)\eta$  だから、今の場合の軌道のズレ  $\Delta\ell_m$  は1周期につき  $\Delta\ell_m = R\Delta\theta \simeq 0.052 \text{ m}$  となる．よって1年間で月のズレは

$$\Delta\ell_m \text{ (one year)} = \Delta\ell_m \times \frac{3.156 \times 10^7}{2.36 \times 10^6} \simeq 69.5 \text{ cm}$$

だけ軌道が遅れる事になる．

- 月の後退 :

月の軌道は楕円なのでこの軌道のズレは後退したように見える部分がある [10] . 軌道の式は

$$r = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (6.28)$$

で与えられるとして十分である . 今 , 月の場合 , 離心率 ( $\varepsilon = 0.055$ ) は十分小さいので上の式を  $\varepsilon$  で展開すると

$$r \simeq R(1 - \varepsilon \cos \theta) \quad (6.29)$$

となる . 従って , 軌道のズレ  $\Delta r$  は  $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$  の時を見ると 1 年間では

$$\Delta r \simeq R\Delta\theta \varepsilon \simeq \Delta\ell_m \text{ (one year)} \varepsilon \simeq 3.8 \text{ cm} \quad (6.30)$$

となっている . 一方 , 月の後退の観測値  $\Delta r_m^{obs}$  は

$$\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8 \text{ cm} \quad (6.31)$$

と観測されている . これは計算値と良く一致している .

この月の後退の測定はドップラー効果を用いた場合 , この精度で可能であると思われる . しかし , 月と地球の絶対距離の測定から 3.8 cm を求める事は不可能である . それは光速の精度が

$$c = (2.99792458 \pm 0.000000012) \times 10^8 \text{ cm/s} \quad (6.32)$$

であり , 8 桁の精度しかないのであるが , 月と地球の絶対距離  $R = 3.85 \times 10^8 \text{ cm}$  と比べて  $\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8 \text{ cm}$  は 10 桁目であるため直接測定は不可能である .

また , もし本当に月が後退しているとしたらエネルギー保存則が局所的にせよ破れる事に対応している . 月の運動の全エネルギーを  $E$  とした場合 , エネルギーのズレ  $\Delta E$  は

$$\Delta E \simeq -2E \frac{\Delta r_m}{R} \quad (6.33)$$

となり ,  $E$  が負である事から , エネルギーが増える事に対応している . しかも破れているレベル  $\delta \equiv \frac{\Delta E}{E}$  が  $\delta \sim 10^{-10}$  では物理的に到底容認できる事ではない .