1.5　保存力とその起源

Newton 方程式においては力が重要な役割を果たしている．この場合，力が保存力であるかどうかと言う問題はエネルギー保存を導く上でも重要である．保存力と言う概念はそれ程，単純なものとは言えないのでここで少し解説しておこう．

1.5.1　保存力とは何か？

まず保存力の定義から始めよう．これは力 $\boldsymbol{F}$ が

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) \tag{1.46}$$

と書く事が出来る力の事である．ここで $U(\boldsymbol{r})$ はポテンシャルと言われている物理量である．この場合，力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{1.47}$$

を満たしているのでこれを保存力の定義とする場合もある．しかしながら，式 (1.46) がどのように導出されたのかと言う事が分かると，やはり式 (1.46) が基本的な定義式と考えるのが妥当であろう．但し，数学的にはどちらでも良い事ではある．

1.5.2　保存力の起源

それでは保存力の起源は何処にあるのだろうか？実はこれは非常に単純な事である．この場合，Newton 方程式が何処から出てきたのかを考えればすぐに理解できる事である．Newton 方程式は量子力学の方程式である Schrödinger 方程式から Ehrenfest の定理を使う事により導き出されている．そしてこの量子力学の Schrödinger 方程式にはポテンシャルと言う物理量しかないため，力はそのポテンシャルの微分として導出されているのである．従って，Newton 方程式の元になっている量子力学の方程式には力 $\boldsymbol{F}$ と言う概念が存在していないのである．このため Schrödinger 方程式を近似して求められている Newton 方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) \tag{1.48}$$

であり，従って保存力の定義はこの式が基本になっているのである．

1.5.3　保存力は仕事をしない！

式 (1.48) において，エネルギー保存の式を求めておこう．これは簡単で，式 (1.48) に $\dot{r}$ を掛ければ良い．この時

$$m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} = -\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}m\left(\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}^2}{dt}\right) = -\frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt}$$

となり，これは直ちに微分が外れる．従って，定数を E とすれば

$$\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(\boldsymbol{r}) = E \tag{1.49}$$

と求める事ができる．これがエネルギー保存の式であるが，この場合, 力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルの微分で書かれている事が本質的である．特に注意して欲しいのは力 $\boldsymbol{F}$ は３個の変数で成り立っているのに対して，ポテンシャルは１個だけの変数と言う点である．実際，何か特別の条件がない限り，変数の自由度数が減少する事はない．これが保存力と言われている最も重要な意味合いである．このようにベクトル量である力がスカラー量の微分で書かれたと言う事はある種の対称性の表現でもある．

それでは仕事について議論しておこう．これはエネルギー保存と基本的には同じ事となっているが，仕事の定義式を書いて置こう．仕事 W を

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.50}$$

と定義しよう．ここで $A,\ B$ は仕事をする経路の始点と終点である．ここで力が保存力の場合，すなわち $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})$ の時，仕事 W は

$$W = -\int_A^B \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_A^B dU(\boldsymbol{r}) = -U(\boldsymbol{r}_A) + U(\boldsymbol{r}_B) \tag{1.51}$$

となる．ここで，ある経路の始点から積分して，その経路の終点まで積分したとして，その終点を始点と同じところまでの積分としたら，

$$W = 0 \tag{1.52}$$

となる．これは仕事をしないと言う事になっている．すなわち，保存力の場合，この力が仕事をすることはなく，従ってエネルギーが保存されている事に対応している．

1.5.4　非保存力の例題 (1)

それでは，非保存力とはどのような力であろうか？ここでは具体例として

$$\boldsymbol{F} = (-kx + \varepsilon y)\boldsymbol{e}_x - ky\boldsymbol{e}_y \tag{1.53}$$

を考えて見よう．この場合 $F_z = 0$ としているが，この事でこの議論がその一般性を失うと言う事はない．この力のローテーションは

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times [(-kx + \varepsilon y)\boldsymbol{e}_x - ky\boldsymbol{e}_y] = \varepsilon \boldsymbol{e}_z \tag{1.54}$$

である事から， $\varepsilon = 0$ の時は保存力 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ であることがわかる．

- **仕事 W**

仕事 $W = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算して見よう．但し，この質点の運動は

$$x = A\cos\omega t \tag{1.55}$$

$$y = A\sin\omega t \tag{1.56}$$

と言う周期運動をしているものと仮定しよう．これは $\varepsilon = 0$ の時の運動に対応している．この場合，仕事 W は運動の周期を T として

$$W = \oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^T (-kx\dot{x} + \varepsilon y\dot{x} - ky\dot{y})dt \tag{1.57}$$

である．但し，

$$\omega T = 2\pi$$

に注意しよう．この計算は直ちにできて

$$W = -\varepsilon A^2 \omega \int_0^T (\sin\omega t)^2 dt = -\pi\varepsilon A^2 \tag{1.58}$$

と求まる．これより保存力は仕事をしないが，非保存力は仕事をするためエネルギーを消費している事がわかる．従って，この非保存力があるとその系ではエネルギー保存則が成り立っていない．

1.5.5　非保存力の例題 (2)

　力が速度に依ってしまう場合，これは保存力ではない．ここでは具体的な例題として１次元系の摩擦力を考えてみよう．これは

$$F_x = -\gamma \dot{x}, \qquad (\gamma > 0) \tag{1.59}$$

のような力として表現されている．例えば，雨粒が落下する場合，空気との衝突が起こっている．これを記述するために上記の摩擦力を導入すると比較的うまく雨粒の運動が記述される事が分かっている．但し，この場合，空気との衝突は多体問題でもあり，実際は極めて複雑な多体の力となっている．従って，このような単純な方程式で書かれていると言う保証は全くない．この場合，仕事 W は

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\gamma \int_{t_A}^{t_B} \dot{x}^2 dt \tag{1.60}$$

となり，これはこれ以上の計算ができない．但しこの仕事が負の値である事は分かっている．従って，これはエネルギー保存を破っている事に対応している．