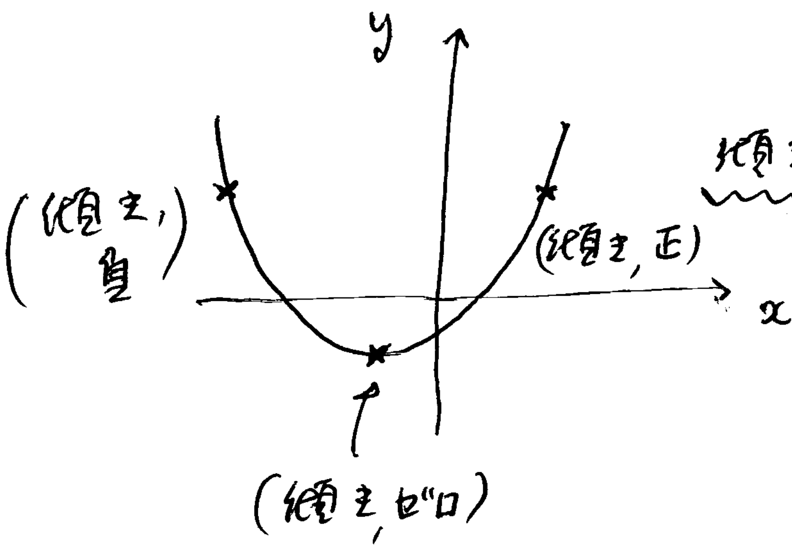
1-2 微分とは何か？

微分とは：「傾き」

(a) 直線の傾き：　$y = ax + b$

傾き：a

(b) 放物線の傾き：　$y = ax^2 + bx + c$



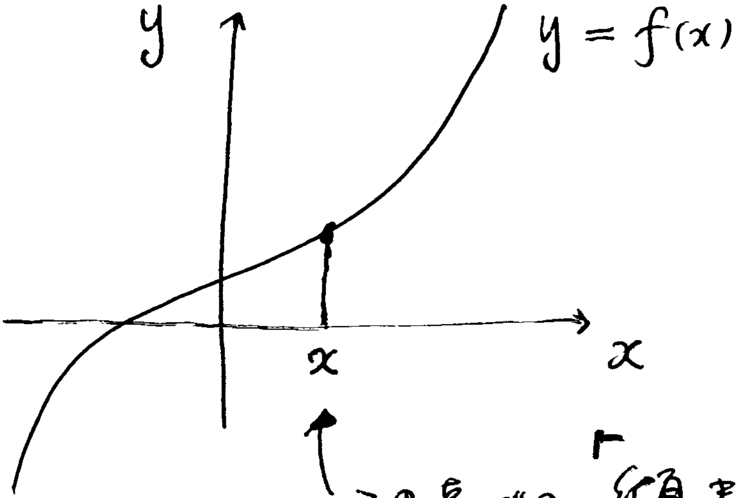
傾きは場所による

放物線の任意の点の「傾き」は定義できるか？

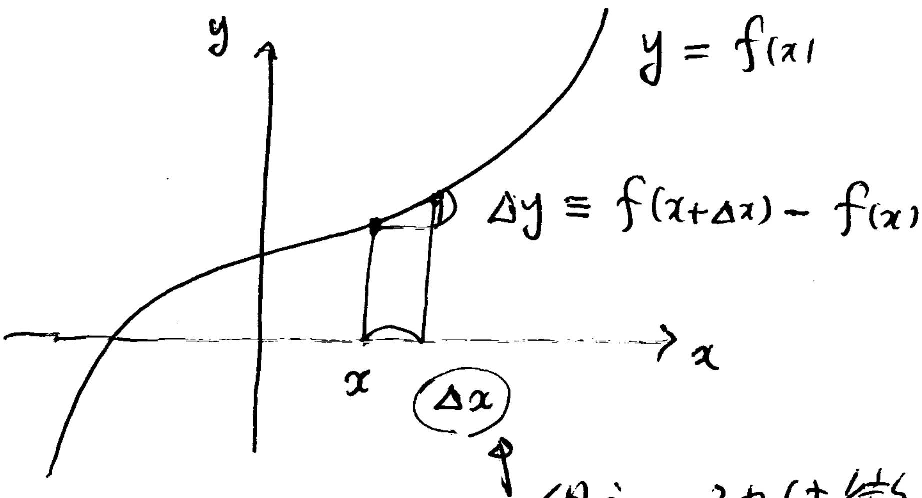
↓

Yes!

[$y = f(x)$ を考える]



この点での「傾き」は？



但し これは微小量

$$\text{傾き} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx をどんどん小さくして この傾きが

一意的に求まれば それが x での傾き

$$f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

↑ 微分係数 という

◎ Examples

1. $y = x^n$ のとき

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$
$$= n x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots$$

よって

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} (\Delta x) + \cdots$$

$\Delta x \to 0$ とすると $\boxed{\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}}$ ← 覚えること!!

No.

Date 5 .

【合成微分】

$\underline{y = f(x)}$

このとき x が t の関数となっているとき

$\underline{x = x(t)}$　　$\underline{y = f(x(t))}$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

となる

（最も重要な公式）

（証）　$\Delta y \equiv f(x(t+\Delta t)) - f(x(t))$

ここで　$\Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t)$　と定義する

このとき　$\Delta t \to 0$ のとき $\Delta x \to 0$

一方　$\Delta y = f(\Delta x + x(t)) - f(x(t))$

$= f(x(t) + \Delta x) - f(x(t))$　だから

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ とすれば

上式が示される

(Example)

$$y = (x^3 + 1)^2 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} \text{ を求める}$$

(i) $u = x^3 + 1$ とおくと

$$y = u^2 \quad , u = x^3 + 1$$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = 2u \cdot 3x^2$

$$= 6x^2(x^3+1)$$

(ii) 一方 $y = (x^3+1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$

だから

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 + 6x^2 = 6x^2(x^3+1)$$

で一致している

【偏微分】

偏微分自体は簡単である

$f(x,y)$ の関数において

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ は } f(x,y) \text{ を } \underline{x} \text{ で微分} \\
\qquad \text{このとき } y \text{ は定数と思う} \\
\dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ は } f(x,y) \text{ を } \underline{y} \text{ で微分} \\
\qquad \text{このとき } x \text{ は定数と思う}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\[2ex]
\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}
\end{cases}
$$

[何故 偏微分が必要か？]

全微分 → 偏微分がでてくる

↑

$f(x, y)$　但し $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

と t の関数とする

↓

一般に $\boxed{f(x(t), y(t), t)}$ を考える

これを t で微分したい（全微分）

$$\boxed{\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}}$$

これが

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

となることを示す

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x \\ y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta y \end{cases}$$

により, Δx , Δy を定義する

$\Delta t \to 0$ で $\Delta x , \Delta y \to 0$

$$\Delta f \equiv f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t) - f(x, y, t)$$

を変形する

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t) \underline{- f(x, y+\Delta y, t+\Delta t)}$$

$$\underline{+ f(x, y+\Delta y, t+\Delta t)} - \underline{\underline{f(x, y, t+\Delta t)}}$$

$$\underline{\underline{+ f(x, y, t+\Delta t)}} - f(x, y, t)$$

No.

Date 10 . .

よって

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t) - f(x, y+\Delta y, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y, t+\Delta t) - f(x, y, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y, t+\Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t) - f(x, y+\Delta y, t+\Delta t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y, t+\Delta t) - f(x, y, t+\Delta t)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$+ \frac{f(x, y, t+\Delta t) - f(x, y, t)}{\Delta t}$$

これより

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$ とかくのは $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

と t にのみよっているから

- Example : $\underline{f(x, y, t) = t^2 x y}$

(但し $x = \cos t$, $y = \sin t$)

(i) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= t^2 y(-\sin t) + t^2 x \cos t + 2txy$$

$$= t^2(-\sin^2 t + \cos^2 t) + 2t \sin t \cos t$$

$$= t^2 \cos 2t + t \sin 2t \quad //$$

(ii) $$f(x, y, t) = t^2 xy = t^2 \cos t \sin t = \frac{1}{2} t^2 \sin 2t$$

$$\frac{df}{dt} = t \sin 2t + t^2 \cos 2t \quad //$$

両者が一致している