1-4 微分方程式

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Newton 方程式} \\ \text{Maxwell 方程式} \end{array} \right.$

$\Longrightarrow$ 微分方程式で与えられる

◎ 微分方程式の解き方

形を覚えてゆく

[1] $\dfrac{dy}{dx} = A(x) \Longrightarrow y = \int A(x)\,dx + C$

但し $A(x)$ は適当な関数

例えば $A(x) = x^3$ など

$$y = \int x^3\,dx + C$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{4}x^4 + C$$

C は定数　この任意性は常にある

[2]

$$\frac{dy}{dx} = B(y)$$

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int dx = x + C$$

◎注：微分方程式は積分の形にもってゆけたら
それは半分以上解けたことになっている

Example： $B(y) = y$ のとき

$$\int \frac{dy}{y} = x + C$$

$$\ln y = x + C$$

$$\therefore \underline{y = e^{x+C} = C_0 e^{x}}$$

[3]

$$\frac{dy}{dx} + ay = g(x) \qquad (a は定数)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right) y = e^{-ax} \frac{d}{dx}\left(e^{ax} y\right)$$

という恒等式を利用する

よって 式は

$$e^{-ax} \frac{d}{dx}\left(e^{ax} y\right) = g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax} y\right) = e^{ax} g(x)$$

$$\therefore \quad e^{ax} y = \int^{x} e^{ax'} g(x')\, dx'$$

$$\therefore \quad y = e^{-ax} \int^{x} e^{ax'} g(x')\, dx'$$

[4] $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)}_{e^{-i\omega t}\frac{d}{dt}e^{i\omega t}} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)}_{e^{i\omega t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega t}\,\cdot\right)} x = 0$$

$$e^{-i\omega t}\frac{d}{dt}e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega t}x\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(e^{2i\omega t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega t}x\right)\right) = 0$$

$$\therefore \quad e^{2i\omega t}\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega t}x\right) = C_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-i\omega t}x\right) = C_1 e^{-2i\omega t}$$

$$\therefore \quad e^{-i\omega t}x = -\frac{C_1}{2i\omega}e^{-2i\omega t} + C_2$$

$$\therefore \quad x = -\frac{C_1}{2i\omega}e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}$$

C_1, C_2 は任意定数だから

$$x = A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

と表される. A_1, A_2, B_1, B_2 は定数