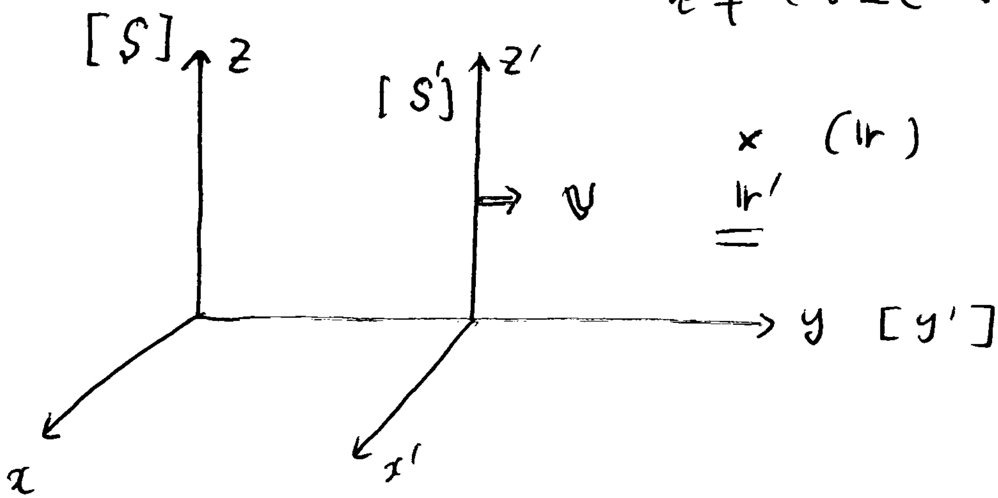
2.2 相対性原理

Galilei 変換：系 S から系 S′ への座標系の変換
速度 $\mathbb{v}$ は一定

【Example】 S：地上
S′：電車（等速直線運動中）



$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{r} &= \mathbb{r}' + \mathbb{v} t \\ t &= t' \end{aligned}}$$

S と S′ 系で物理法則は同等

No.

Date 29

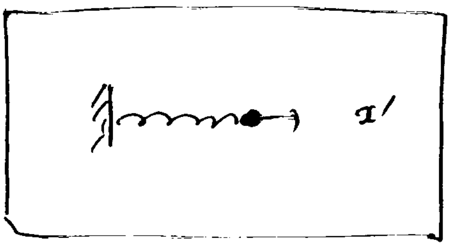
【Example】 【地上】 バネの実験をする

[座標系 (x, t)]

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx}$$

→ $\begin{cases} x = x_0 \sin(\omega t + \delta) \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$ と求まる

【電車】: 等速直線運動中(速度 V)



[座標系は (x', t')]

このとき $\boxed{m\ddot{x}' = -kx'}$ $(t' = t)$

→ $x' = x_0' \sin(\omega t' + \delta)$

(証) $x' = Vt + x$

よって $\boxed{\ddot{x}' = \ddot{x}}$

また 力 (バネの強さ, k) は 地上でも電車でも同じ よって 同じ形の 方程式になる

◎ 相対性理論 (Einstein)

⇕

特殊相対性理論
(Special relativity)

◎ Galilei 変換 : 系 S' が 系 S にみて
光速 c に近い速度のとき

↓

Galilei 変換 は 実験 と合わない!!

(Michelson-Morley)

『実験結果』 光はどの系でも一定 [c]

↓

Einstein の 相対論 の 仮定

光速 c は どの慣性系でも同じ

No.
Date 3/

◉ $\boxed{\text{Lorentz 変換}}$: 系 S $\xrightarrow[v]{}$ 系 S'

$$\begin{cases} x' = x \quad , y' = y \\ z' = \gamma(z - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

▣ v が光速に近い場合 ⇒ Lorentz 変換が正しい

▣ $v \ll c$ のとき

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \approx 1$$

よって $\left[\begin{array}{l} z' \simeq z - vt \\ t' \simeq t \end{array}\right]$ ↔ Galilei 変換

◉ Lorentz 変換は Maxwell 方程式を不変

Newton 方程式は不変でない!!

【考察】

Newton eq. $\quad \cancel{m\ddot{x}' = F_x'} \leftarrow m\ddot{x} = F_x$

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y \\ z' &= \gamma(z - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right) \end{aligned}\right.$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\dot{x}}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{z}}{c^2}\right)}$$

$$\boxed{\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v\dot{z}}{c^2}\right)^3} \times \left[\ddot{x}\left(1 - \frac{v\dot{z}}{c^2}\right) + \dot{x}\frac{v\ddot{z}}{c^2}\right]}$$

◎ z-方向

$$\left\{\begin{aligned} dz' &= \gamma(dz - v\,dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dz\right) \end{aligned}\right.$$

$$\dot{z}' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2} dz} = \frac{\dot{z} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{z}}$$

$$\ddot{z}' = \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d\dot{z}'}{dt'} = \frac{1}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dz\right)} d\left(\frac{\dot{z} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{z}}\right)\frac{1}{1 - \frac{v}{c^2}\dot{z}}$$

$$\therefore \boxed{\ddot{z}' = \frac{\ddot{z}}{\gamma^3\left(1 - \frac{v\dot{z}}{c^2}\right)^3} \neq \ddot{z}}$$

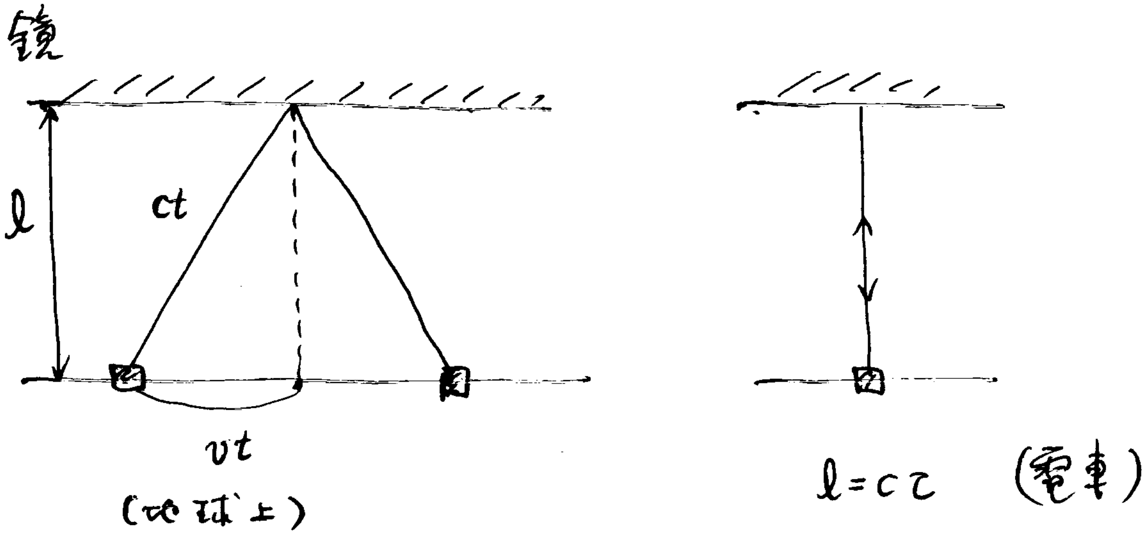
【Lorentz 変換】

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right)$$

系によって時間が異なる

↓ Why?

光速 c はどの系でも同じとした



$$\boxed{l^2 + (vt)^2 = (ct)^2}$$

地上の人は 2t　　電車の人は 2τ

$$\therefore \boxed{\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,t}$$

[速度の合成則:] v_1, v_2

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$v_2 = c$ のとき

$$V = \frac{v_1 + c}{1 + \frac{v_1}{c}} = c \quad //$$

$$dz' = \gamma\,(dz + v\,dt)$$

$$dt' = \gamma\,(dt + \frac{v}{c^2}\,dz)$$

$$V' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz + v\,dt}{dt + \frac{v}{c^2}\,dz} = \frac{\dot{z} + v}{1 + \frac{v\dot{z}}{c^2}}$$

$\left.\begin{matrix} \dot{z} \Rightarrow v_1 \\ v \Rightarrow v_2 \end{matrix}\right)$ とすれば

$$V' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad //$$