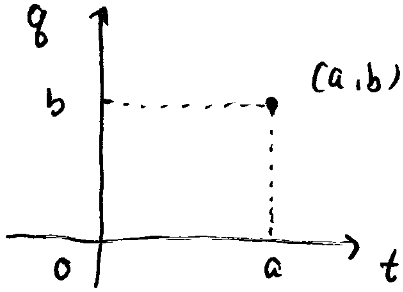
2.5 最小作用の原理

No.
Date 58

● 変分法： 関数 $q(t)$ の「関数形」を変化させ、ある量を最小にする（極小）

［例1］



［問］ t-q 平面で原点と (a,b) を結ぶ距離 l を「最小」にする曲線は何か？

$$\updownarrow$$

$$q = q(t)$$

$$l[q] = l = \int \sqrt{(dq)^2 + (dt)^2}$$

↑（これが距離の定義）

$$\therefore\ l[q] = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 1}\ dt$$

ここで $q = q(t)$ の関数形をかえてゆく

δq だけかえる

但し 端は固定している

$$\boxed{\delta q(0) = \delta q(a) = 0}$$

(例えば)

$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ とする

このとき

$$\delta q(t) \equiv \delta a_0 + \delta a_1 t + \delta a_2 t^2 \cdots + \delta a_n t^n$$

このとき $\boxed{\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d\,\delta q}{dt}}$ を示す

(微分と変分が交換できる)

∵

$$\frac{dq}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

よって $\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \delta a_1 + 2\delta a_2 t + \cdots + n\delta a_n t^{n-1}$

一方 $\frac{d\,\delta q}{dt} = \delta a_1 + 2\delta a_2 t + \cdots + n\delta a_n t^{n-1}$

よって $\boxed{\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d\,\delta q}{dt}}$

$$l[q] = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 1}\ dt$$

$$\underline{\delta l[q] \equiv l[q+\delta q] - l[q]}$$

を計算する

(これは微分 a と其の

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ と同じ)

$$\therefore \delta l[q] = \int_0^a \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dt} + \frac{d\delta q}{dt}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2} \right\} dt$$

$\boxed{\delta q}$ は十分小さいとして展開する

第1項は $\sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2\frac{dq}{dt}\frac{d\delta q}{dt} + \cdots}$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2} \left(1 + \frac{\left(\frac{dq}{dt}\right)\left(\frac{d\delta q}{dt}\right)}{1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2} + \cdots \right)$$

よって

$$\delta l[q] = \int_0^a \frac{\left(\frac{dq}{dt}\right)\left(\frac{d\delta q}{dt}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2}}\ dt$$

ここで $\frac{d\delta q}{dt}$ を部分積分すると

$$\delta l[q] = \left[\frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{1+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}}\delta q\right]_0^a - \int_0^a \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{1+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}}\right)\right]\delta q\, dt$$

$\delta q(a) = \delta q(0) = 0$ より

$$\delta l[q] = -\int_0^a \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{1+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}}\right)\right]\delta q\, dt$$

$\delta l[q] = 0$ が極小値を与えるので

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dq}{dt}}{\sqrt{1+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2}}\right) = 0}$$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \text{const} = C_1$$

すなわち $\boxed{q = C_1 t + C_2}$

↓

直線となる

【例2】

積分量 $I[q]$

$$I[q] = \int_0^\infty \left[\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + q^2\right] dt$$

を最小にする $q = q(t)$ の関数形を求めよ.

但し $q(0) = 1$, $q(\infty) = 0$ とする.

$\left(\frac{dq}{dt} \equiv \dot{q} \right.$ とかく $\left. \right)$

$$\delta I[q] \equiv I[q+\delta q] - I[q]$$

$$= \int_0^\infty \left[(\dot{q}+\delta\dot{q})^2 + (q+\delta q)^2\right] dt$$

$$- \int_0^\infty (\dot{q}^2 + q^2)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left[2\dot{q}\,\delta\dot{q} + 2q\,\delta q\right] dt$$

(但し $(\delta q)^2$ は無視した)

第1項を部分積分すると

$$\int_0^\infty 2\dot{q}\,\delta\dot{q}\, dt = \left[2\dot{q}\,\delta q\right]_0^\infty - \int 2\ddot{q}\,\delta q\, dt$$

これより

$$\delta I[q] = \int_0^\infty \left[-2\ddot{q} + 2q\right] \delta q \, dt$$

$\delta I[q] = 0$ より

$$\boxed{\ddot{q} - q = 0}$$

これはすぐ解けて

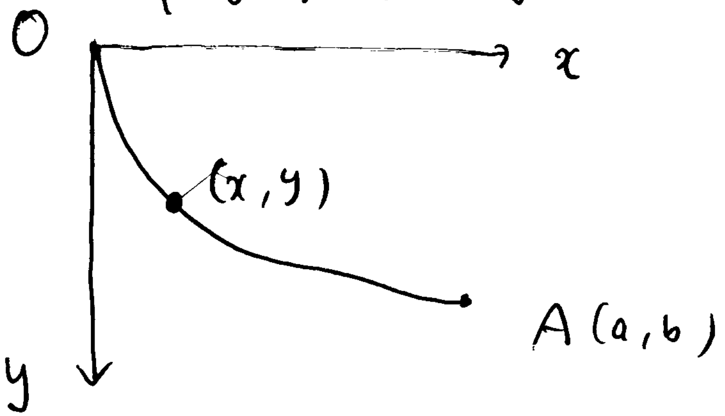
$$\underline{q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}}$$

$q(0) = 1$, $q(\infty) = 0$ より

$$\underline{q(t) = e^{-t}}$$ と求まる

[Eulerの変分法]

[問題] (なめらかな x-y 平面に拘束されている質量 m の質点が、ある曲線にそって O から A まですべりおちる。この時、時間 T を最小にする曲線は何か?)



点 (x, y) での速さは

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad より \quad \boxed{v = \sqrt{2gy}}$$

時間は

$$T = \int \frac{ds}{v} \qquad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad y' = \frac{dy}{dx} として$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, dx \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a F(y, y')\, dx$$

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

$$\delta T \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[F(y+\delta y, y'+\delta y') - F(y, y') \right] dx$$

$F(y+\delta y, y'+\delta y')$: δy, $\delta y'$ は十分小さい

↓

Talor 展開

$$F(y+\delta y, y'+\delta y') = F(y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots$$

よって

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right] dx$$

$\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$ なから 第2項を
部分積分すると

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[\int_0^a \frac{\partial F}{\partial y}\delta y \, dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \right]_0^a - \int_0^a \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y \, dx \right]$$

$\delta T = 0$ より

$$\delta T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[\int_0^a \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y \, dx = 0 \right.$$

よって

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0}$$

Euler 方程式 が導かれた

$F(y,y') = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$ を上式(2)に代入する

【注】 微分をとると

$$F = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\ y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = y'y^{-\frac{1}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y''y^{-\frac{1}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} + y'\left(-\frac{1}{2}y'\right)y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ y'y^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}2y'\right)(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}\ y''$$

$$= y''y^{-\frac{1}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y'^2y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} - y'^2y^{-\frac{1}{2}}y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

この式が $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ に等しい

この両辺に $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ をかけると

$$yy''(1+y'^2) - \frac{1}{2}y'^2(1+y'^2) - y'^2yy'' = -\frac{1}{2}(1+y'^2)^2$$

$$\therefore\ yy'' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y'^2 = 0 \ \rightarrow\ \boxed{1+y'^2+2yy''=0}$$

これに y' をかけて1回積分すると $y(1+y'^2) = \text{Const}$ となる

【最小作用の原理】

作用 S を定義する

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt$$

L を Lagrangian という

$$\underline{L \equiv T - U}$$

(運動エネルギー)　(ポテンシャルエネルギー)

[仮定] $\left\{ \begin{array}{l} \underline{q \text{ と } \dot{q} \text{ は独立}} \text{ である} \\ \text{端は止める} \quad \underline{\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0} \end{array} \right.$

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Big[L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) - L(q,\dot{q}) \Big] dt$$

$\delta S = 0$ より 運動方程式が求まる

$\updownarrow$

最小作用の原理という

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) = L(q,\dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \cdots$$

よって

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right]dt$$

↓ 部分積分より

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q\,dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\,dt = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0}$$

Lagrangeの方程式という

(Euler-Lagrangeの方程式ともいう)

⇒ Newtonの方程式になる !!

◎ Lagrange 方程式の利点

(a) 一般化が簡単

$$L = L(q_1, \cdots q_N, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_N)$$ とすると

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \quad (i = 1, \cdots N)$$

(b) 一般座標で書かれている

(c) Lagrangian はスカラー量なので

比較的扱いやすい!