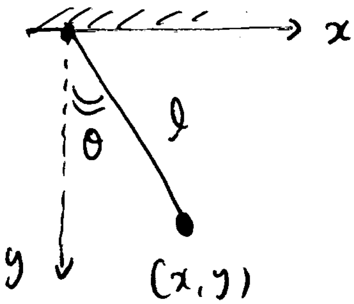
2-6-2 単振り子

◎ Lagrange 方程式 は

どの座標系でも 成立

[[Examples]]

(1) 単振り子



◎ 問題を解くコツ

⇓

質点の座標を (x, y, z) でかく

◎ 運動エネルギー T

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

◎ ポテンシャル U

$$U = -mgy$$ (下向きにy軸をとったのでマイナス)

よって Lagrangian は

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

• 糸はたるまないとする ⇒ $x^2 + y^2 = l^2$

よって $\begin{cases} x = l \sin\theta \\ y = l \cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta} \cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta} \sin\theta \end{cases}$

Lの式に代入して

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta}$$

と求まる

- Lagrange方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\therefore \quad ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

(微分方程式の解)　$\theta \ll 1$ のとき

$$\sin\theta \approx \theta$$

よって　$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ として　$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

この解は　$\theta = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

AとBは初期条件より決まる