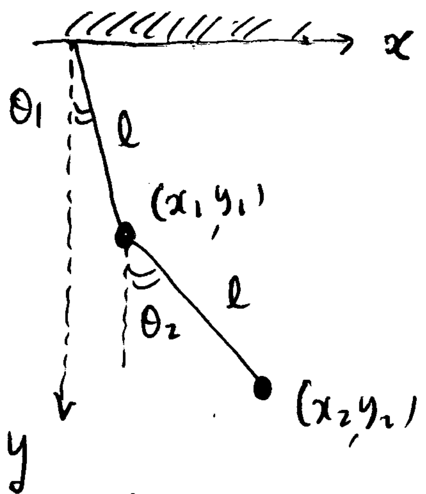
2-6-3 2重振り子



2重振り子 質量 m
糸の長さは l

質点の座標を (x, y, z) でかく

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ U = -mgy_1 - mgy_2 \end{cases}$$

(↑ マイナスは y軸を下向きにしたから)

$$\begin{cases} x_1 = l \sin\theta_1 \\ y_1 = l \cos\theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ \dot{y}_1 = -l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \\ y_2 = l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = l\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 = -l\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ U = -mgl\cos\theta_1 - mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \end{cases}$$

$\alpha = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} L = {} & m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_2^2 + m l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + 2 m g l \cos\theta_1 + m g l \cos\theta_2 \end{aligned}}$$

Lagrange 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} \\[2ex] \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} \end{cases}$$

- 一般にとくのは難しい

$\Downarrow$

微小振動のみ考える

$$\begin{cases} \theta_1 \ll 1 \\ \theta_2 \ll 1 \end{cases}$$

このとき

$$L = ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$
$$+ 2mgl\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2\right) + mgl\left(1-\frac{1}{2}\theta_2^2\right)$$

θ_1」 $$\frac{d}{dt}\left(2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\right) = -2mgl\,\theta_1$$

θ_2」 $$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\right) = -mgl\,\theta_2$$

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}}$ とすると

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\omega_0^2\theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 = -\omega_0^2\theta_2 \end{cases}$$

◎ 連立線形微分方程式の解法

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ \theta_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$ とおいて上式に代入

$$\begin{cases} (2\omega^2 - 2\omega_0^2) A_1 + \omega^2 A_2 = 0 \\ \omega^2 A_1 + (\omega^2 - \omega_0^2) A_2 = 0 \end{cases}$$

行列でかき直すと

$$\begin{pmatrix} (2\omega^2 - 2\omega_0^2) & \omega^2 \\ \omega^2 & (\omega^2 - \omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

このとき A_1 A_2 が non-zero の解をもつ条件は

行列式がゼロ

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

よって $\boxed{\omega = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\ \omega_0}$

◉ ωのが4つあるのは、2階の連立微分方程式だから。

● ω が求まると A_1, A_2 の比が求まる

(i) $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0$ のとき

行列のどちらかの式に代入すると

$$\underline{A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} A_2}$$ と求まる

(ii) $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0$ のとき

$$\underline{A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ \theta_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$ だったから

<u>2つの角度の比</u>が決ったことになる