2-6-4 未定係数法 (Lagrange multiplier) 【参考】

◎ 単振り子の問題

拘束条件 $x^2+y^2=l^2$ を

Lagrangian に入れる

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgy+\lambda(x^2+y^2-l^2)$$

λを未定係数という

⇓

$\boxed{\text{変数は } x, y, \lambda}$

x」 $m\ddot{x}=2\lambda x$

y」 $m\ddot{y}=mg+2\lambda y$

λ」 $0=x^2+y^2-l^2$

ここで
$$\begin{cases} x=l\sin\theta \\ y=l\cos\theta \end{cases}$$
とすると3番目の式はみたされる。

このx, yを上の2式に代入すると

$$\begin{cases} \ddot{x} = l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} = -l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$ より

$$\begin{cases} m(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) = 2\lambda l\sin\theta & \cdots ① \\ -m(l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta) = mg + 2\lambda l\cos\theta & \cdots ② \end{cases}$$

ここで ①$\times\cos\theta$ − ②$\times\sin\theta$ を実行すると

$$\boxed{ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta}$$ と求まる

[注] どの方法で求めても同じ答になる

このLagrange未定係数法は

拘束条件が複雑なときに

利用価値が高くなる