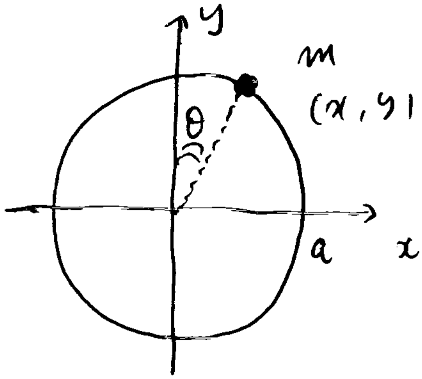
【特別演習問題】

1. 鉛直面内の円周上に拘束され、なめらかに運動する質点 m が一様重力下で運動する



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy$$

$$\begin{cases} x = a\sin\theta \\ y = a\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = a\dot{\theta}(-)\sin\theta \end{cases}$$

よって

$$\underline{L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta}$$

よって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\underline{ma^2\ddot{\theta} = mga\sin\theta}$$

(ii) $\theta \ll 1$ のとき $\sin\theta \approx \theta$ より

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\theta$$

$\omega^2 = \frac{g}{a}$ とおいて この解は

$$\theta = A\sinh\omega t + B\cosh\omega t$$

となる。

初期条件として $t=0$ で $\theta=0$, $\dot{\theta}=\omega_0$ とすると

$$\theta = \frac{\omega_0}{\omega}\sinh\omega t$$

しかし、この解は t がわりに大きくなると θ は急激に増大し $\theta \ll 1$ の条件を破ってしまう。従って、あまりよい解とは言えない

$\ddot{\theta} = \omega_0^2\sin\theta$ を解くと

楕円関数でかける。

(iii) 円周の底での運動

$$\theta = \pi - \psi$$ とおくと

$$-ma^2\ddot{\psi} = mga\sin\psi$$

$|\psi| \ll 1$ とすると　$\sin\psi \approx \psi$ より

$$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0$$

これは単振動となる.

よって　$\psi = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

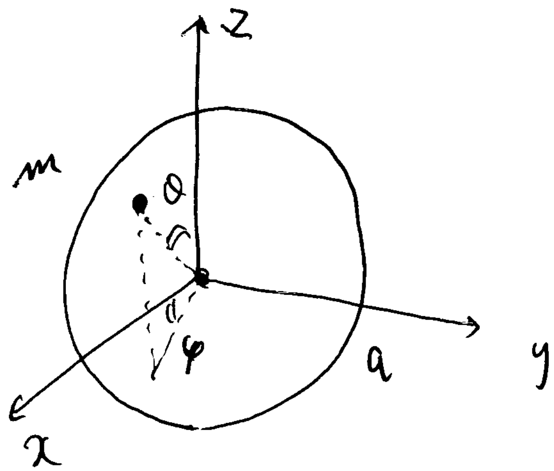
$t=0$ で　$\theta = \pi$, $\dot{\theta} = \omega_0$ とすれば

$$\theta = \pi + \frac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t$$

従って周期 T は　$T = \frac{2\pi}{\omega}$

よって　$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

2. 半径 a の球面上に拘束されている質点 m が一様重力下でなめらかに運動する。



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$\begin{cases} x = a \sin\theta \cos\varphi \\ y = a \sin\theta \sin\varphi \\ z = a \cos\theta \end{cases}$$

よって

$$L = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2) - mga \cos\theta$$

θ」 $$\frac{d}{dt}\left(ma^2\dot{\theta}\right) = ma^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mga\cos\theta$$

φ」 $$\frac{d}{dt}\left(ma^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0$$

よって $$ma^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = 定数 \equiv L_0$$

これより
$$ma^2\ddot{\theta} = \frac{L_0^2\cos\theta}{ma^2\sin^3\theta} + mga\sin\theta$$

(i) $L_0 = 0$ のとき

すなわち、φ方向の回転がないとき

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta$$

これは円周上の問題と同じ

(ii) $L_0 \neq 0$ のとき

φ方向の回転速度がある

方程式に $\dot{\theta}$ をかけると

$$ma^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{L_0^2 \dot{\theta} \cos\theta}{ma^2 \sin^3\theta} + mga\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{L_0^2}{2ma^2\sin^2\theta}\right) - \frac{d}{dt}(mga\cos\theta)$$

よって

$$\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_0^2}{2ma^2\sin^2\theta} + mga\cos\theta = E \ (\leftarrow 定数)$$

● 底での運動を考える

$\theta = \pi - \psi$ とおいて

$$\frac{1}{2} ma^2 \dot{\psi}^2 + \frac{L_0^2}{2ma^2\sin^2\psi} - mga\cos\psi = E$$

ψが微小振動するとし $|\psi| \ll 1$

より

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\psi}^2 + \frac{L_0^2}{2ma^2\psi^2} - mga\left(1-\frac{1}{2}\psi^2\right) = E$$

$$\therefore \frac{1}{2}ma^2\dot{\psi}^2 + \frac{L_0^2}{2ma^2\psi^2} + \frac{1}{2}mga\psi^2 = E + mga$$

ここで $z = a\psi$ とおくと

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{L_0^2}{2mz^2} + \frac{mg}{2a}z^2 = E + mga$$

となる

ところが3次元調和振動子の場合

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 = E$$ となっており

このときの周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であった

このことを利用すると球面の底を運動する質量 m の粒子の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$ となって

円周のときと一致する