3. 保存法則

3-1 エネルギー

Newtonの方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U \qquad (\mathbf{F} = -\nabla U)$$

$U(\mathbf{r})$: $\mathbf{r}$ のみによる
($\dot{\mathbf{r}}$ 等によらない!!)

$\dot{\mathbf{r}}$ を両辺にかけて

$$m\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla U$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = -\frac{d}{dt}U(\mathbf{r})$$

よって

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E$$

(定数)

エネルギー保存の式

E は初期条件で決まる

【注】ポテンシャルについて

$\mathbb{F} = -\nabla U$ と何故書いてよいか？

仕事 $\int_A^B \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ の線積分が

その経路によらない

↓ このとき

$\mathbb{F} = -\nabla U$ とかける

$$\int_A^B \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_A^B \nabla U \cdot d\mathbb{r}$$

$$= -\int_A^B dU = U_A - U_B$$ //

【エネルギー保存】

$$m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F} \quad \therefore \int_A^B m\ddot{\mathbb{r}} \cdot d\mathbb{r} = \int_A^B \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$$\because \int_A^B m\ddot{\mathbb{r}}\, d\mathbb{r} = \int_A^B m\ddot{\mathbb{r}} \frac{d\mathbb{r}}{dt} dt = \int_A^B \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2\right) dt$$ より

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}_B^2 - \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}_A^2 = -U_B + U_A$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}_A^2 + U_A = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}_B^2 + U_B = 一定$$

◎ 時間の一様性

時間の一様性 ⟷ Lagrangian が
時間に<u>陽</u>にはよらない
(explicit)

$$L = L(q, \dot{q}) \longrightarrow \left(L(q, \dot{q}, t) \text{ ではない} \right)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}$$

これがつかない!!

Lagrange方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{だから}$$

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) = 0$$

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \text{定数}$$

一方運動エネルギー T は $\dot{q}$ の2次式

$$T = f(q)\,\dot{q}^2$$

U は $\dot{q}$ によらないので

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2f(q)\,\dot{q}^2 = 2T$$

これより

$$L - 2T = \text{定数}$$

$L = T - U$ だから

$$T + U = \text{定数}$$

エネルギー保存式