3-2 運動量 (momentum)

運動量 $\underline{\mathbb{p} = m\dot{\mathbb{r}}}$

Newton 方程式は $\underline{\dot{\mathbb{p}} = \mathbb{F}}$ ともかける

◎何故 運動量か？

量子力学
相対論 } 運動量が本質的な物理量になる（速度ではなくて）

◎ 相互作用（ポテンシャル）U が質点間の距離のみによっているN体系

$$U = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} U(|\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j|) \times \frac{1}{2}$$

（2回和をとってしまうから）

このとき 全運動量 $\boxed{\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i}$ は保存する

(証) $\frac{d\mathbb{P}}{dt}=0$ を示す.

この系の Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U(|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|)$$

Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbb{r}}_i}=\frac{\partial L}{\partial \mathbb{r}_i} \qquad (i=1,\cdots,N)$$

$$\therefore\ m_i\ddot{\mathbb{r}}_i=-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}\frac{\partial U(|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|)}{\partial \mathbb{r}_i}$$

よって 上式で i の和をとると

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\mathbb{r}}_i=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{N}\frac{\partial U(|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|)}{\partial \mathbb{r}_i}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left[\frac{\partial U(|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|)}{\partial \mathbb{r}_i}+\frac{\partial U(|\mathbb{r}_j-\mathbb{r}_i|)}{\partial \mathbb{r}_j}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left[\frac{(\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j)}{|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{(\mathbb{r}_j-\mathbb{r}_i)}{|\mathbb{r}_i-\mathbb{r}_j|}\frac{\partial U}{\partial r}\right]$$

$=0$

但し $\dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{\partial U(|\mathbf{r}|)}{\partial r}$

$r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ とした。

これより $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ であるから

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$

すなわち $\mathbf{P}$ は保存する

(注)

$$\frac{\partial U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{\partial(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ とすると

$$= \frac{\partial U(|\mathbf{r}|)}{\partial \mathbf{r}}$$

$$= \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

//

No.

Date 87

(別解)

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i>j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

このLagrangianは $\underline{\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon}}$ の変換に

対して不変。 $\boldsymbol{\epsilon}$は任意定数ベクトル

すなわち

$$\delta L \equiv L(\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon}) - L(\mathbf{r}_i) = 0$$

ここで $\boldsymbol{\epsilon}$ が十分小さいとして展開すると

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}\boldsymbol{\epsilon} = 0$$

この式が任意の $\boldsymbol{\epsilon}$ に対して成立

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0}$$

Lagrange方程式より $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}$

よって $\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = 0$

すなわち $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ が保存する