No.
Date 88

3-3 角運動量

角運動量 $\mathbb{L}$:

$$\boxed{\mathbb{L} \equiv \mathbb{r} \times \mathbb{p} = \mathbb{r} \times m\dot{\mathbb{r}}}$$

(何故?)

↑ 中心力ポテンシャルだと

$\mathbb{L}$ が保存する

$$\boxed{\frac{d\mathbb{L}}{dt} = 0}$$

(証明) 中心力ポテンシャル

$$U(\mathbb{r}) = U(|\mathbb{r}|)$$

$r = |\mathbb{r}|$ のみの関数

このとき

$$\mathbb{F} = -\nabla U = -\frac{\mathbb{r}}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$$

よって

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbb{r} \times m\dot{\mathbb{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbb{r}} \times m\dot{\mathbb{r}}}_{=0} + \mathbb{r} \times \underbrace{m\ddot{\mathbb{r}}}_{\mathbb{F}}$$

$$= \mathbb{r} \times \mathbb{F} = -\mathbb{r} \times \mathbb{r} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad //$$

よって $\dfrac{d\mathbb{L}}{dt}=0$ より $\mathbb{L}$ は定数

● 中心力について：

(a) 力でいうと

$$\mathbb{F} = f(r)\,\hat{\mathbb{r}}$$

$\mathbb{r}$ 方向に力が働く

(b) ポテンシャルでいうと

$$U(\mathbb{r}) = U(|\mathbb{r}|)$$

$$\nabla U(r) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbb{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbb{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbb{e}_z$$

$$= \frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\mathbb{e}_x + \frac{y}{r}\mathbb{e}_y + \frac{z}{r}\mathbb{e}_z\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\mathbb{r}$$

$\left(\mathbb{r} = x\mathbb{e}_x + y\mathbb{e}_y + z\mathbb{e}_z \text{ より}\right)$

◎ 角運動量の保存

$$\begin{cases} \text{中心力} \quad U(r) \\ x\text{-}y \text{ 面での運動} \quad (\text{質量 } m) \end{cases}$$

この Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

よって r)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\therefore \quad m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

φ)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0}$$

よって $mr^2\dot{\varphi} = \text{定数} = C_0$

◎ 一方 $L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$

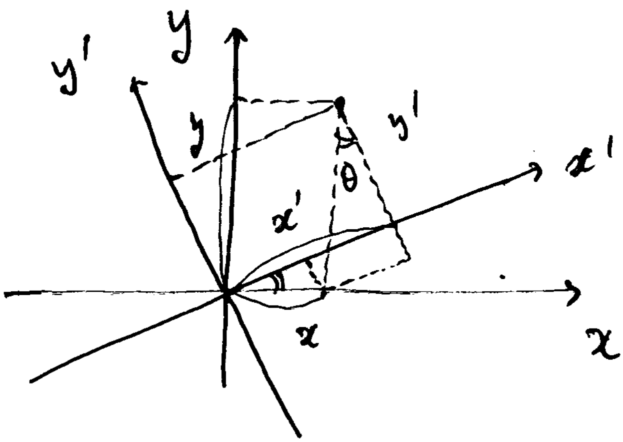
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$ より

$L_z = mr^2\dot{\varphi} = C_0$ となり C_0 は角運動量であった。

[角運動量] ⟺ [空間回転]

角運動量 $\mathbb{L}$ は 空間の回転 と関係している

● z-軸の回転（座標系の回転）



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

● 回転角 θ は微小とする　$\theta \ll 1$

このとき　$\begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 \end{cases}$

◎ 関数 $U(x, y, z)$ を回転すると

$$U(\mathbf{r}') = U(x', y', z')$$
$$= U(x + y\theta, y - x\theta, z)$$

θ が十分小さいとしたので Talor 展開すると

$$U(\mathbf{r}') = U(x, y, z) + \frac{\partial U}{\partial x} y\theta + \frac{\partial U}{\partial y}(-x\theta) + \cdots$$
$$= U(x, y, z) + \left(\frac{\partial}{\partial x} y\theta - \frac{\partial}{\partial y} x\theta\right) U(x, y, z) + \cdots$$

$$\underline{U(\mathbf{r}') = \left[1 + \theta\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) + \cdots\right] U(\mathbf{r})}$$

θ の回転に対して $U(\mathbf{r})$ が不変だとする

$$\underline{U(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r})}$$

このためには

$$\boxed{y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} = 0}$$

ところが

角運動量 $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

よって $$\frac{dL_z}{dt} = m\left(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x}\right)$$

$$= mx\ddot{y} - my\ddot{x}$$

一方 Newton 方程式より

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

従って

$$\frac{dL_z}{dt} = m\ddot{y}x - m\ddot{x}y = -x\frac{\partial U}{\partial y} + y\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \left(y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

ところが $U(r)$ が回転に対して不変なら

$$y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$\Downarrow$ すなわち

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$ となる