3-4 スケール変換

スケール変換

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r} \\ t' = \beta t \end{cases}$$

↓ スケール変換により

ある種のポテンシャルにおいて

周期の形が予言できる

● ポテンシャル $U(\mathbf{r})$

$$\boxed{U(\alpha \mathbf{r}) = \alpha^d \, U(\mathbf{r})}$$

をみたすときを考える

[例] 調和振動子

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k r^2$$

このときは $\boxed{d = 2}$

◎ 運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbb{r}}^2$$

$$\begin{cases} \mathbb{r}' = \alpha \mathbb{r} \\ t' = \beta t \end{cases}$$ より

$$T' = \frac{1}{2} m \frac{\alpha^2}{\beta^2} \dot{\mathbb{r}}^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T$$

$$U' = \alpha^d U$$ として

$$L' = T' - U' = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T - \alpha^d U$$

◎ 仮定： $\boxed{\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^d}$ がみたされるとする

このとき

$$L' = \alpha^d (T - U) = \alpha^d L$$

よって 運動方程式は不変

$$\alpha^{d} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\beta = \alpha^{1-\frac{d}{2}}}$$

をみたすとき、この系は

スケール変換において不変

【例】

1. 重力 $U(r) = -\frac{GMm}{r}$

このとき $\boxed{d=-1}$

$$\left.\begin{matrix} r \sim l \\ t \sim T \end{matrix}\right\} \text{として} \rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha \sim l \\ \beta \sim T \end{matrix}\right.$$

$\beta = \alpha^{1-\frac{d}{2}}$ より

$$T \sim l^{1-\frac{d}{2}} \sim l^{\frac{3}{2}} \quad (d=-1)$$

よって

$$\underline{T \propto l^{\frac{3}{2}}}$$

$\uparrow$

これは Keplerの第3法則

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{公転周期}}^{\,T}\text{の2乗は} \\ \underline{\text{軌道半径}}_{\,l}\text{の3乗に比例する} \end{array} \right\}$$

2. 調和振動子

$$U = \frac{1}{2} k r^2 \qquad \underline{d = 2}$$

$$T \sim l^{1-\frac{d}{2}} \sim l^0$$

周期は振幅によらない $\left(T = \frac{2}{\omega}\pi \right)$

3. 単振り子

$$U = mgz$$

$$\boxed{d=1}$$

$$T \sim l^{1-\frac{d}{2}} = l^{\frac{1}{2}}$$

$$T \sim \sqrt{l}$$

単振り子の周期　$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

【注】応用できない系

このスケール変換が応用できる系は
かぎられている。

例えば

$$U(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

これはスケール変換に対して
不変ではない!!

α, β という2つのスケールが入っている