

3-4 2次元変換

2次元変換

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ t' = \beta t \end{cases}$$

↓ 2次元変換 により

ある種の波動関数 $\psi(r, t)$ に対して

周期の形が尋ねられる

● 波動関数 $\psi(r)$

$$\psi(\alpha r) = \alpha^d \psi(r)$$

求めたいとされている

[134] 調和振動子

$$\psi(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

との式 (2)

$$\boxed{d=2}$$

① 運動 = 2u 1 -

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

$$\begin{cases} r' = \alpha r \\ t' = \beta t \end{cases} \quad \text{27}$$

$$T' = \frac{1}{2} m \frac{\alpha^2}{\beta^2} \dot{r}^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T$$

$$U' = \alpha^d U \quad \text{e l 2}$$

$$L' = T' - U' = \frac{\alpha^2}{\beta^2} T - \alpha^d U$$

② 仮定 :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^d$$

2u 27 2u 3 > 27 3

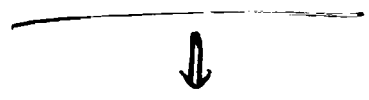
29 27

$$L' = \alpha^d (T - U) = \alpha^d L$$

$\alpha, 2$ 運動方程式は不変.

④

$$\alpha^d = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$



$$\beta = \alpha^{1 - \frac{d}{2}}$$

見れば可也。この系は

2r-u 変換に対して不変

【例】

1. 重力

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

このとき $d = -1$

$$\left. \begin{matrix} r \sim l \\ t \sim T \end{matrix} \right\} \text{ 此 } \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \alpha \sim l \\ \beta \sim T \end{matrix} \right.$$

$$\beta = \alpha^{1 - \frac{d}{2}} \quad \alpha \sim$$

$$T \sim l^{1 - \frac{d}{2}} \sim l^{\frac{3}{2}} \quad (d = -1)$$

2.2

$$T \propto l^{\frac{3}{2}}$$

↑

これは Kepler の第 3 法則

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{l} \\ \text{公転周期の2乗は} \\ \text{軌道半径の3乗に比例する} \end{array} \right\}$$

2. 調和振動子

$$U = \frac{1}{2} k r^2 \quad \underline{d=2}$$

$$T \sim l^{1-\frac{d}{2}} \sim l^0$$

周期は振幅によらず $T = \frac{2}{\omega} \pi$

3. 単振り子

$$U = mgz$$

$$\boxed{d=1}$$

$$T \sim l^{1-\frac{d}{2}} = l^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{T \sim \sqrt{l}}$$

単振り子の周期

$$\underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

【例】 定常微分方程式

この定常微分方程式の定常解は
 以下の通りである。

例として

$$U(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

これは定常微分方程式に対して
 不変な解である!!

α, β は任意の定数 α, β である
任意の定数