No.

Date 11 .

4-3 中心力の問題

中心力場

ポテンシャル $U(\mathbb{r})$ は「場」である

◉ 中心力場 とは

『$U(\mathbb{r})$ が 距離 r のみの関数』

$$\therefore \boxed{U(\mathbb{r}) = U(r)} \qquad r = |\mathbb{r}|$$

このとき：

力は ↗ $\mathbb{F} = -\nabla U(\mathbb{r}) = -\frac{\mathbb{r}}{r}\frac{dU}{dr}$

となり $\mathbb{F}$ は $\mathbb{r}$ の方向に比例

$$\boxed{\mathbb{F} = -\mathbb{e}_r \frac{dU}{dr}} \quad \left(\mathbb{e}_r = \frac{\mathbb{r}}{r} \right)$$

となる

◉ 保存量 ： 中心力場には「保存量」がある

$$\Downarrow$$

角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$

$(\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}})$

中心力だと $\mathbf{L}$ が保存する

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0}$$

(証) $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dU}{dr}$ を使う。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}$$

$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ より

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dU}{dr}$$

$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ より $\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0}$

◎ 中心力場中の質点 m の運動

⇓ 平面上の運動

⇕

角運動量が保存するから

∵ $\mathbb{L}$ の方向を z 軸とする

このとき粒子の座標 $\mathbb{r}$ は

$$\mathbb{r}\cdot\mathbb{L} = \mathbb{r}\cdot\mathbb{r}\times\mathbb{p} = \mathbb{r}\times\mathbb{r}\cdot\mathbb{p} = 0$$

すなわち運動 $\mathbb{r}$ は常に $\mathbb{L}$ を直交する平面内（x-y 平面）となる

◎ 質点 m の Lagrangian L

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - U(r)$$

$$\therefore\ L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$ [x-y 平面での極座標]

この L は φ を陽に含まない

⇓

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

よって $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = $ 定数

∴ $\boxed{mr^2\dot{\varphi} = C}$ Cは定数

↕

角運動量そのもの

(証) $L_z = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})_z$

$= m(x\dot{y} - y\dot{x})$

$= m[r\cos\varphi\{\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\}$

$- r\sin\varphi\{\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\}]$

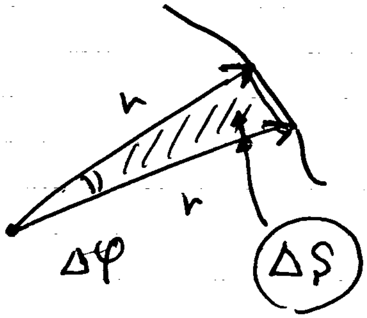
$= mr^2\dot{\varphi} = l$ (定数)

∴ $\boxed{l = mr^2\dot{\varphi}}$

No.

Date 15

◎ 角運動量保存の別の見方：



面積 ΔS

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

よって $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} r^2 \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ より

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{l}{2m}$$

面積速度 一定

$$\boxed{\text{Kepler の第2法則}}$$

◎ 面積： この面積は

$$S = \int_0^T \frac{dS}{dt}\, dt = \frac{l}{2m} T$$

周期

$$\therefore \boxed{S = \frac{l}{2m} T}$$

T が周期

【中心力場中の運動】

質量 m の質点，ポテンシャル $U(r)$

Lagrangian は

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)}$$

Lagrange eq.

r, $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\therefore \boxed{m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}}$$

$l = mr^2\dot{\varphi}$ より

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$\dot{r}$ をかけて エネルギー積分をすると

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)}$$

積分定数

よって

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{l^2}{m^2 r^2}}$$

また $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$ より

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{mr^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{l^2}{m^2 r^2}}}$$

よって

$$\boxed{\varphi = \int \frac{\frac{l}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left(E - U(r)\right) - \frac{l^2}{r^2}}}}$$

となる

質点の軌道を与える式である

Date 18

[ルートの中]：

$$2m(E-U(r))-\frac{l^2}{r^2}=2m\left[E-U(r)-\frac{l^2}{2mr^2}\right]$$

従って

$$\boxed{U_{eff}(r)\equiv U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}}$$

とすると

$U_{eff}(r)$ は新しいポテンシャルのようになる

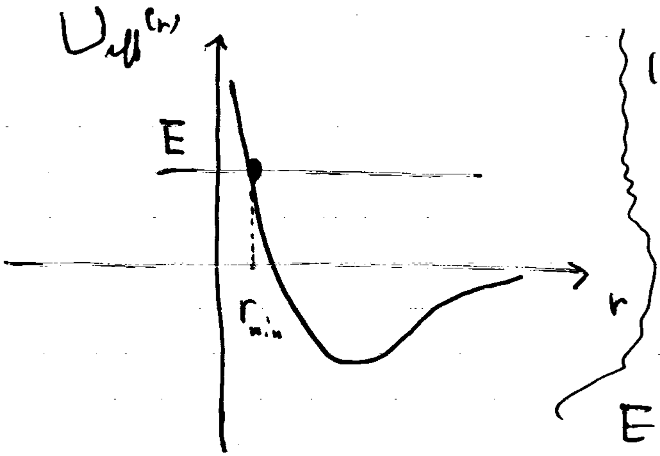
- 3次元の問題 → 1次元問題に帰着された
- $\frac{l^2}{2mr^2}$ ⇒ 遠心力ポテンシャルという常に斥力
- 1次元との相違 ⇒ $\boxed{r>0}$ である

① 重力とクーロン力

$$\boxed{U(r) = -\frac{\alpha}{r}}$$ の形である

このとき

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$



(a) $\underline{E > 0}$ のとき

ルートの中は正

∴ $E - U_{eff} \geq 0$

となるよう

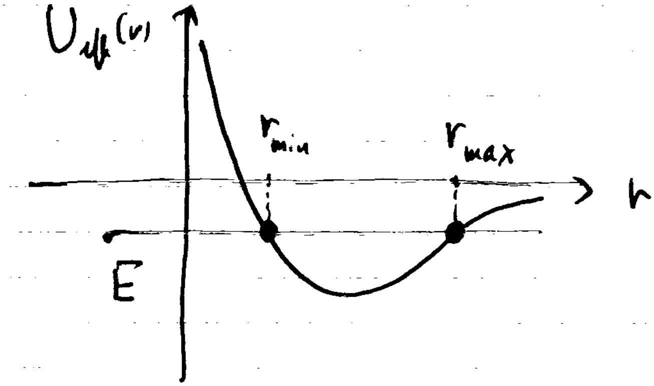
$$E + \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \geq 0$$

$$\therefore \boxed{r \geq \frac{-m\alpha + \sqrt{(m\alpha)^2 + 2mEl^2}}{2mE}}$$

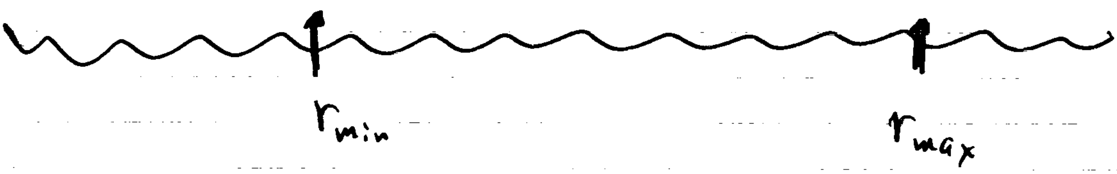
このことから

$$r_{min} = \frac{-m\alpha + \sqrt{(m\alpha)^2 + 2mEl^2}}{2mE}$$

(b) $\underline{\underline{E<0}}$ のとき



$$\frac{m\alpha-\sqrt{(m\alpha)^2+2mE\ell^2}}{-2mE}\leq r\leq\frac{m\alpha+\sqrt{(m\alpha)^2+2mE\ell^2}}{-2mE}$$



● 原点近くのふるまい ($\ell\neq0$)

遠心力 $\frac{\ell^2}{2mr^2}>0$

$r\to0$ で発散する $\Rightarrow$ 斥力的

質点は原点に到達できない