4-4 Kepler問題

Keplerの3つの法則

- 第1法則：地球の軌道は楕円

$$r = \frac{A}{1+e\cos\varphi}$$

$$e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$$ (離心率)

- 第2法則：面積速度一定

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m}$$

$$\Updownarrow$$

角運動量保存

- 第3法則：地球の周期の2乗は長半径 a の3乗に比例する

$$T^2 \propto a^3$$

ポテンシャル：

$$\underline{U(r) = -\frac{\alpha}{r}}, \quad \alpha = GMm$$

重力は常に引力

Coulomb力も $\underline{U(r) = \pm\frac{\alpha}{r}}$ の形。
同じ電荷だと斥力

◉ 軌道を与える式：

$$\underline{\varphi = \int \frac{\frac{l}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left(E - U(r) - \frac{l^2}{r^2}\right)}}}$$

但し $\underline{U(r) = -\frac{\alpha}{r}}$ $(\alpha > 0)$

ここで $\boxed{x = \frac{1}{r}}$ とおくと $\boxed{dx = -\frac{1}{r^2}\,dr}$

よって

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2m\alpha}{l^2}x - x^2}}$$

右辺のルートの中は xの2次元

$\downarrow$

$$(x-x_1)(x_2-x)$$

$$\therefore \quad \varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}}$$

但し

$$\boxed{\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{2m\alpha}{l^2} \\ x_1 x_2 &= -\frac{2mE}{l^2} \end{aligned}}$$

ここで $x = x_1 + (x_2-x_1)\sin^2\theta$ とおく

$$\varphi = -\int \frac{2(x_2-x_1)\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{(x_2-x_1)\cos\theta\sin\theta}$$

$$\therefore \quad \boxed{\varphi = -2\theta + C}$$

Cは定数

$C = \varphi_0$ とおくと

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 - 2\theta}$$

よって

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\cos 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\cos(\varphi - \varphi_0)$$

一方

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{2m\alpha}{\ell^2}\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}$$

よって

$$x = \frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{\ell^2} - \frac{m\alpha}{\ell^2}\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{\ell^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right)$$

φ_0の選び方は座標系の選択による

$\varphi_0 = \pi$ とすると $\cos(\varphi - \varphi_0) = -\cos\varphi$

αって

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E\alpha^2}{m\alpha^2}}\cos\varphi\right)}$$

となる

$$\underline{r = \frac{A}{1 + e\cos\varphi}}$$

と比較して

$$\begin{cases} A = \dfrac{l^2}{m\alpha} & : 通径 \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{2El^2}{m\alpha^2}} & : 離心率 \end{cases}$$

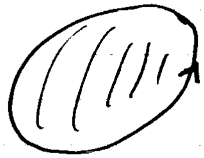
となる

(i) $E < 0$ のとき $e < 1$ $\Rightarrow$ 楕円

(ii) $E > 0$ 〃 $e > 1$ $\rightarrow$ 双曲線

$\boxed{\text{第1法則}}$

◎ 周期 T ： 地球が1周すると



その面積になる

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}$$ だから $$\int_0^T \frac{dS}{dt}\,dt = \frac{l}{2m}T$$

$$\boxed{S = \frac{l}{2m}T}$$

一方 $$S = \pi ab = \pi \frac{A^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

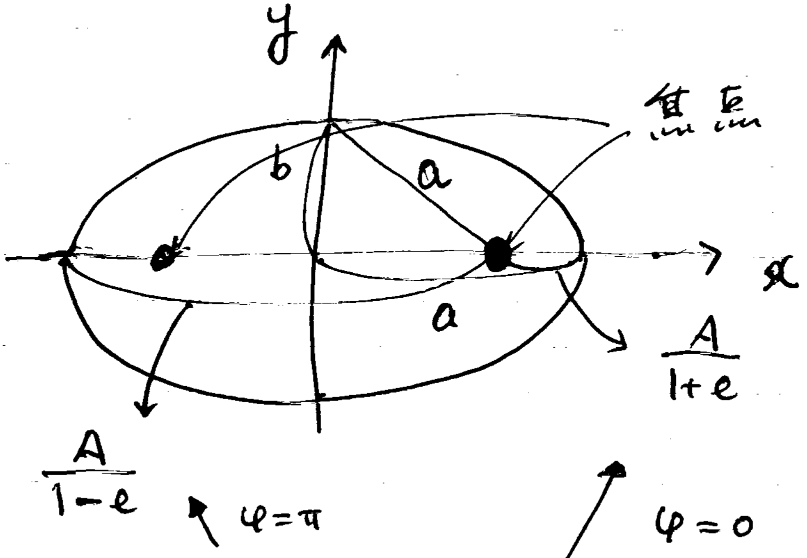
$$A = \frac{l^2}{m\alpha} \Rightarrow l = \sqrt{m\alpha}\sqrt{A}$$

よって $$T = \pi \frac{2m}{\sqrt{m\alpha}} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

また $a = \dfrac{A}{1-e^2}$ より

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\, a^{\frac{3}{2}}}$$ → 第3法則

【楕円の幾何学】



$$\boxed{r=\frac{A}{1+e\cos\varphi}}$$

$$\frac{A}{1+e}+\frac{A}{1-e}=2a \qquad \therefore \boxed{a=\frac{A}{1-e^2}}$$

$$b^2+\left(a-\frac{A}{1+e}\right)^2=a^2 \qquad \therefore \boxed{b=\frac{A}{\sqrt{1-e^2}}}$$

$$\therefore \boxed{S=\pi ab=\pi\frac{A^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}}$$