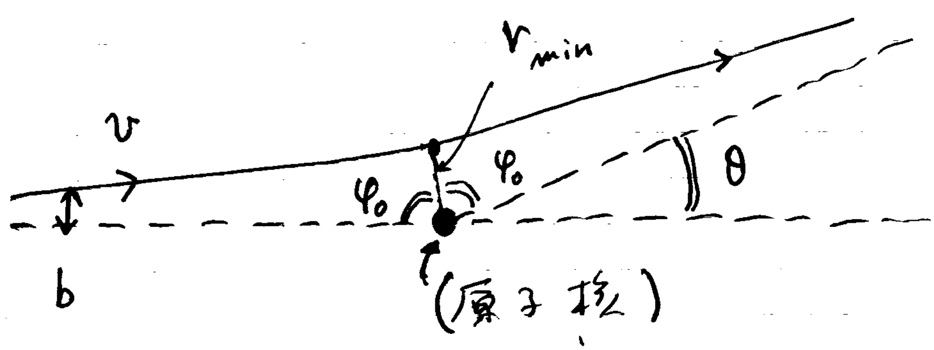
5-2 Rutherford 散乱

Rutherford 散乱 : 荷電粒子と原子核の散乱

$$e + {}^{Z}A \to e + {}^{Z}A$$

(荷電粒子) (原子核)



・ポテンシャル $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$

『角運動量は保存する』

$$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times m\mathbb{v}$$

(散乱平面に垂直) (b) 衝突する方向

$$\therefore \boxed{l = mvb}$$

図からみて

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{l}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

ここで

$\boxed{r_{min} : \text{荷電粒子が原子核に最も近づいたときの距離}}$

◎ φ_0 の求め方： $x = \frac{1}{r}$ とおいて

$$dx = -\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$\therefore\ \varphi_0 = -\int_{x_2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{◎ ここで } x_1 \text{ は負} \\ \text{◎ } x_2 = \dfrac{1}{r_{min}} \end{array} \right.$

Date

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\sin^2\psi$$ とおく

（ψ プサイと読む）

$$\therefore\ \varphi_0 = -\int_{x_2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_0} 2\,d\psi = \pi - 2\psi_0$$

$$\therefore\ \boxed{\varphi_0 = \pi - 2\psi_0}$$

但し $\begin{cases} x=0 \text{ のとき} & \sin^2\psi_0 = -\dfrac{x_1}{x_2-x_1} \\ x = x_2 & \psi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

一方 $$\cos 2\psi_0 = 1 - 2\sin^2\psi_0 = \frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{-\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + \frac{2l^2}{mE}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{但し}\quad x_1 + x_2 = -\dfrac{2m\alpha}{l^2}, \quad x_1 x_2 = -\dfrac{2mE}{l^2} \\ \qquad x_2 - x_1 = \dfrac{2m\alpha}{l^2}\sqrt{1 + \dfrac{2El^2}{m\alpha^2}} \end{array} \right\}$$

$\varphi_0 = \pi - 2\psi_0$ であるから

$$\cos\varphi_0 = \cos(\pi - 2\psi_0) = -\cos 2\psi_0$$

$$\therefore \quad \cos\varphi_0 = \frac{\frac{\alpha}{E}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 + \frac{2l^2}{mE}}}$$

$E = \frac{1}{2}mv^2$, $\quad l = mvb \quad$ より

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\alpha^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{mv^2b}{\alpha}\right)^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\varphi_0 = \frac{mv^2b}{\alpha}}$$

図 より

$$2\varphi_0 + \theta = \pi$$

$$\therefore \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$\alpha, 2$ $\quad \tan\varphi_0 = \cot\frac{\theta}{2} = \frac{mv^2 b}{\alpha}$

$$\therefore \boxed{b = \frac{\alpha}{mv^2}\cot\frac{\theta}{2}}$$ と求まった.

[散乱断面積] $d\sigma$

$$d\sigma = 2\pi b\left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta = b\left|\frac{db}{d\theta}\right|\frac{d\Omega}{\sin\theta}$$

$$(d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta)$$

$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{\alpha}{mv^2}\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$ より

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

(Rutherford 散乱の微分断面積)

これは量子力学で求めたものと同じである

Date

【Rutherford 散乱の性質】

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

1. α の符号によらない。
   (斥力, 引力 によらない)
2. v が小さいと断面積は大きくなる
   ($v \to 0$ で無限大)
3. θ が小さいと断面積は大きくなる
   ($\theta \to 0$ で無限大)

◎ $\theta = 0$ とは何か？

(質点だと $\theta = 0$ で無限大
実際には大きさがある)

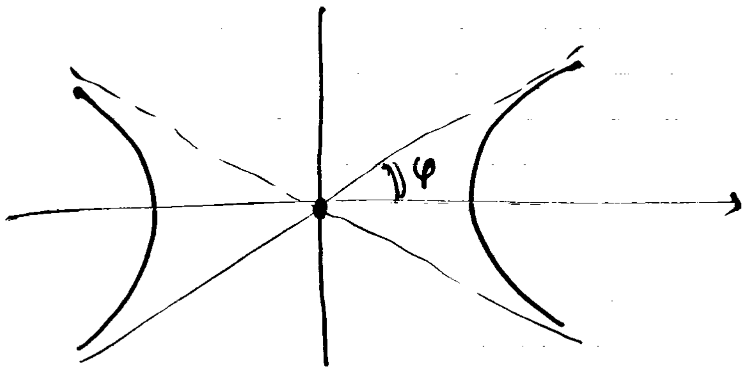
【$\cos\varphi_0$ の求め方】（別解）

Kepler 問題で

$$\boxed{r = \frac{A}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\alpha^2}}\cos\varphi\right)}}$$

であった

● $E > 0$ なら 軌道は双曲線



- ● r が最小 $\Rightarrow$ $\varphi = 0$
- ● r が無限大 $\Rightarrow$ $\varphi = \varphi_0 + \pi$

↓ 分母がゼロ

$$\therefore\ 1 - \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\alpha^2}}\cos\varphi_0 = 0$$

よって

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\alpha^2}}} \quad /\!/$$