6. 微小振動

6-1 強制振動

◎ 調和振動子 (1次元)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

↓

$$\boxed{m\ddot{x} = -m\omega^2 x}$$

この一般解は

$$\underline{x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t}$$

である。

● この系に外から力を加える

$F(t)$ (時間による力)

↓ このとき Newton 方程式は

$$\boxed{m\ddot{x} = -m\omega^2 x + F(t)}$$

このとき エネルギー保存は

成立しない。

[Example] $\underline{F(t) = f_0 \sin \gamma t}$ のとき

(f_0, γ は定数)

よって

$$\boxed{m\ddot{x} + m\omega^2 x = f_0 \sin \gamma t}$$

[その解法]

(a) 特解を求める

(b) 右辺をゼロとしたときの一般解を求める

(c) (特解) + (一般解) が答.

(a) 特解の求め方 (x_0 とする)

$x_0 = A \sin \gamma t$ とおいて代入すると

$$m(-A\gamma^2 + A\omega^2)\sin \gamma t = f_0 \sin \gamma t$$

$$\therefore \boxed{A = \frac{f_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}}$$ と求まる.

よって $$\boxed{x_0 = \frac{f_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \sin \gamma t}$$

(b) 右辺ゼロの一般解は

$$A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t$$

よって

$$\boxed{x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t + \frac{f_0}{m(\omega^2-\gamma^2)} \sin\gamma t}$$

が解である

【Note】 $\gamma \to \omega$ のとき振幅は発散する

(この形を詳しくみると)

$$x = A_1' \sin\omega t + A_2 \cos\omega t + \frac{f_0}{m(\omega^2-\gamma^2)} (\sin\gamma t - \sin\omega t)$$

$$\therefore \quad x' = A_1' \sin\omega t + A_2 \cos\omega t - \frac{f_0}{m(\omega+\gamma)}\left(\frac{\sin\omega t - \sin\gamma t}{\omega-\gamma}\right)$$

ここで $\gamma \to \omega$ と極限をとると

$$\lim_{\gamma\to\omega} \frac{\sin\omega t - \sin\gamma t}{\omega-\gamma} = t\cos\omega t$$

よって 振幅 x は

$$\boxed{x = A_1' \sin\omega t + A_2 \cos\omega t - \frac{f_0}{2m\omega} t \cos\omega t}$$

となる。

変数は t と共に線形に増大する

[Appendix]

$$\ddot{x} + w^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

(F(t) が一般の時の求め方)

変形すると

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

ここで $Z \equiv \dot{x} + i\omega x$ を導入すると

$$\dot{z} - i\omega z = \frac{1}{m} F(t)$$ となる

これは $\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) Z = e^{i\omega t} \frac{d}{dt}(e^{-i\omega t} z)$ より

$$e^{i\omega t} \frac{d}{dt}(e^{-i\omega t} z) = \frac{1}{m} F(t)$$

よって $$e^{-i\omega t} z = \int^t e^{-i\omega t'} \frac{1}{m} F(t') dt'$$

よって $$\boxed{Z = e^{i\omega t} \int^t e^{-i\omega t'} \frac{1}{m} F(t') dt'}$$

と求まる

x は $$\boxed{x = \frac{1}{w} \mathrm{Im}\, z}$$ より求まる

(Imaginary part)