No.

Date

6-2 多くの自由度をもつ系

自由度 : $x_1, \cdots, x_N$ （N個の自由度という）

3次元の粒子 → x, y, z （3個の自由度）

［N個の自由度の系］ N個の質点，質量 m_i

ポテンシャル $U(x_1, \cdots, x_N)$

◎ 解ける系 （バネでつながっている系）

$$U(x_1, \cdots x_N) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ij}\, x_i x_j$$

但し k_{ij} は定数

また $k_{ij} = k_{ji}$ （対称）とする

この Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ij}\, x_i x_j$$

Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (i=1,\cdots N)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j = 0}$$

◎ 解きす : $x_i = A_i e^{i\omega t}$ とおいて代入する

$$-\omega^2 A_i e^{i\omega t} + \sum_{j=1}^{N} k_{ij} A_j e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore \boxed{-\omega^2 A_i + \sum_{j=1}^{N} k_{ij} A_j = 0}$$

行列にすると

$$\begin{pmatrix} -\omega^2+k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & -\omega^2+k_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ k_{N1} & \cdots & \cdots & -\omega^2+k_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = 0$$

$A_1, A_2 \cdots A_N$ が non-zero の解をもつための条件は $\boxed{行列式 = 0}$

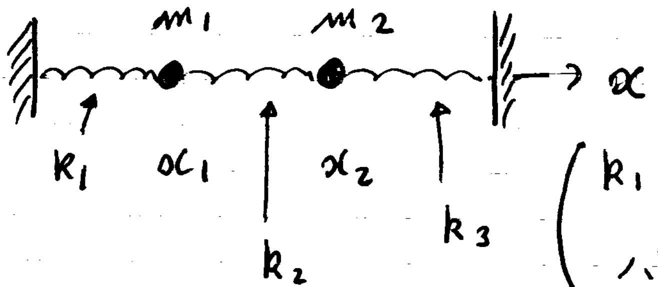
$$\boxed{\det \begin{pmatrix} -\omega^2 + k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ k_{N1} & & -\omega^2 + k_{NN} \end{pmatrix} = 0}$$

これは ω^2 に対する <u>N次方程式</u>である

$\Downarrow$

<u>N個の根</u>がある

[例題]　2個のバネがつながっている(1次元)



(k_1, k_2, k_3 はバネ定数)

[バネの自然長 l]

この Lagrangian は

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 (x_1 - l)^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1 - l)^2 - \frac{1}{2} k_3 (2l - x_2)^2}$$

ここで
$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= x_1 - l \\ y_2 &= x_2 - 2l \end{aligned}}$$
を導入する

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) y_1^2 - \frac{1}{2} (k_2 + k_3) y_2^2 + k_2 y_1 y_2$$

となる.

簡単のために

$$\boxed{m_1 = m_2 = m}$$ とする

また
$$\begin{cases} K_1 = k_1 + k_2 \\ K_2 = k_2 + k_3 \\ K_3 = -k_2 \end{cases}$$ とする

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2} K_1 y_1^2 - \frac{1}{2} K_2 y_2^2 - K_3 y_1 y_2}$$

となる

運動方程式は

$$\begin{cases} m \ddot{y}_1 + K_1 y_1 + K_3 y_2 = 0 \\ m \ddot{y}_2 + K_2 y_2 + K_3 y_1 = 0 \end{cases}$$

これを解くには

$$\begin{cases} y_1 = A_1 e^{i\omega t} \\ y_2 = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}$$ とおいて入れる

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 e^{i\omega t} + K_1 A_1 e^{i\omega t} + K_3 A_2 e^{i\omega t} = 0 \\ -m\omega^2 A_2 e^{i\omega t} + K_2 A_2 e^{i\omega t} + K_3 A_1 e^{i\omega t} = 0 \end{cases}$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ より

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + K_1 & K_3 \\ K_3 & -m\omega^2 + K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

A_1, A_2 が non-zero の解をもつ

⇓

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + K_1 & K_3 \\ K_3 & -m\omega^2 + K_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \left(\omega^2 - \frac{K_1}{m}\right)\left(\omega^2 - \frac{K_2}{m}\right) = \frac{K_3^2}{m^2}$$

$$\therefore \boxed{\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}(K_1 + K_2) \pm \frac{1}{m}\sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4K_3^2}\right]}$$

$\omega_\pm^2$ は常に正

◉ 直交変換

$$\begin{cases} \text{行列} & A \\ \text{転置行列} & A^t \end{cases}$$

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

$$\boxed{A^t \cdot A = 1} \Rightarrow \text{直交行列}$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{1}{2} K_1 y_1^2 - \frac{1}{2} K_2 y_2^2 - K_3 y_1 y_2$$

ここで $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$

と座標変換する

よって

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2} K_1 (Q_1 \cos\theta + Q_2 \sin\theta)^2$$

$$- \frac{1}{2} K_2 (-Q_1 \sin\theta + Q_2 \cos\theta)^2$$

$$- K_3 (Q_1 \cos\theta + Q_2 \sin\theta)(-Q_1 \sin\theta + Q_2 \cos\theta)$$

よって

$$\boxed{\begin{aligned} L = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2\right) &- \frac{1}{2}Q_1^2\left[K_1\cos^2\theta+K_2\sin^2\theta-2K_3\cos\theta\sin\theta\right] \\ &- \frac{1}{2}Q_2^2\left[K_1\sin^2\theta+K_2\cos^2\theta+2K_3\sin\theta\cos\theta\right] \\ &- Q_1Q_2\left[\underbrace{K_1\cos\theta\sin\theta-K_2\sin\theta\cos\theta+K_3\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\right] \end{aligned}}$$

ここで Q_1Q_2 の係数 をゼロとする

$$\boxed{(K_1-K_2)\frac{1}{2}\sin 2\theta + K_3\cos 2\theta = 0}$$

よって $\tan 2\theta = -\dfrac{2K_3}{K_1-K_2}$

↓

$$\therefore \boxed{\cos 2\theta = \frac{K_1-K_2}{\sqrt{(K_1-K_2)^2+4K_3^2}}}$$

となる

このとき Lagrangian L は

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\lambda_1 Q_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_2 Q_2^2}$$

とかける.

但し

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left[K_1 + K_2 + \sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4K_3^2} \right] \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[K_1 + K_2 - \sqrt{(K_1 - K_2)^2 + 4K_3^2} \right] \end{cases}$$

この時の固有振動数は

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{m}\lambda_1 \\ \omega_2^2 = \frac{1}{m}\lambda_2 \end{cases}$$ となる.

$\Downarrow$

これは $\omega_\pm^2$ と一致している.