# 6-3 減衰振動



摩擦があるとき

⇓

$$\underline{F' = -\alpha \dot{x}} \qquad (\alpha > 0)$$

(エネルギーは保存しない)

[例] バネの運動に摩擦力が加わる

$$\underline{m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}}$$

ここで $\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{k}{m} \\ \lambda = \dfrac{\alpha}{2m} \end{cases}$ とおくと

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0}$$

この微分方程式を解けばよい.

[解法] $x = Ae^{\mu t}$ とおいて代入する

$$(\mu^2 + 2\lambda\mu + \omega^2) A e^{\mu t} = 0$$

よって $$\boxed{\mu^2 + 2\lambda\mu + \omega^2 = 0}$$

よって

$$\mu_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

となる

この時一般解は

$$x = A_1 e^{\mu_+ t} + A_2 e^{\mu_- t}$$

(解の性質)

(i) $\omega > \lambda$ のとき

$$\mu = -\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$ より

$$x = A_1 e^{-\lambda t + i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t} + A_2 e^{-\lambda t - i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t}$$

$$\therefore \quad x = B e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\, t + \delta)$$

(振動しながら減衰していく)

(ii) $\lambda > \omega$ のとき

$$x = A_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} + A_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}$$

単に減衰

(摩擦が強い)