6.5 ハミルトニアン

◎ 復習：Lagrangian $L(q,\dot{q})$

は $(q,\dot{q})$ の関数

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt \quad \text{として}$$

作用 S を最小にすると

Lagrange 方程式 ⇒ Newton の方程式が求まる

◎ ハミルトニアンを導入する

$$H(p,q) \equiv p\dot{q} - L$$

但し $p \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ （定義の運動量）

（p, q の関数）

何故ハミルトニアンが必要か？

古典力学の範囲

$\Downarrow$

とくに必要とはいえない

(Lagrangian で十分)

- 相対論
- 量子力学

$\Rightarrow$ 運動量 p が本質的

Lagrangian $\boxed{L(q,\dot{q})}$

ハミルトニアン $\boxed{H(q,p)}$

$(q,\dot{q}) \Rightarrow (q,p)$ への変換

◎ Hamilton方程式の導出

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[p\dot{q} - H(p,q) \right] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p\, \dot{q} + \underbrace{p\, \delta\dot{q}}_{} - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q \right] dt$$

部分積分する

（但し $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ を使う）

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0$$

任意の $\delta p, \delta q$ に対して $\delta S = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}}$$

Newton方程式と同じ

[Example] 調和振動子

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right)$$

$$\therefore \ H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamilton equation :

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{cases}$$

よって $\quad m\ddot{q} = -kq$

これは調和振動子の方程式である