

6.5 $1. \dot{u} t = p \dot{v}$

8

○ 復習 : Lagrangian $L(q, \dot{q})$

(q, \dot{q}) の関数

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad t_1, t_2$$

↑

作 (非) S を 最小にすると

Lagrange の方程式 \Rightarrow Newton の方程式 へ 変換

○ $1. \dot{u} t = p \dot{v}$ を 導入する

$$H(p, q) \equiv p \dot{q} - L$$

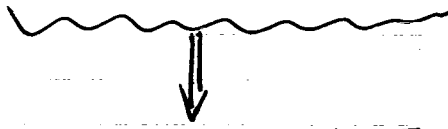
但し $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ (定義の運動量)

↑

(p, q の関数)

何故 $1. \dot{u} t = p \dot{v}$ が必要か?

古典力学の範囲



とくに重要なのは $u \dot{u} u$

(Lagrangian $z^u + \sqrt{p}$)

相対論
 量子力学

\Rightarrow 運動量 p

本質的

Lagrangian $L(q, \dot{q})$

ハミルトン $H(q, p)$

$(q, \dot{q}) \Rightarrow (q, p)$ の変換

① Hamilton の 方程式 の 導出

58

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [p \dot{q} - H(p, q)] dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right] dt$$

各項目の積分

(ただし $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ として)

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0$$

任意の $\delta p, \delta q$ に対して $\delta S = 0$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

Newton の 方程式 (2) (1)

[Example] 調和振動子

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

$$H = p \dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right)$$

$$\therefore H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Hamilton equation :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{cases}$$

$$\leadsto m \ddot{q} = -kq$$

これは調和振動子の

方程式である