7. 剛体の運動

7-1 座標系の回転

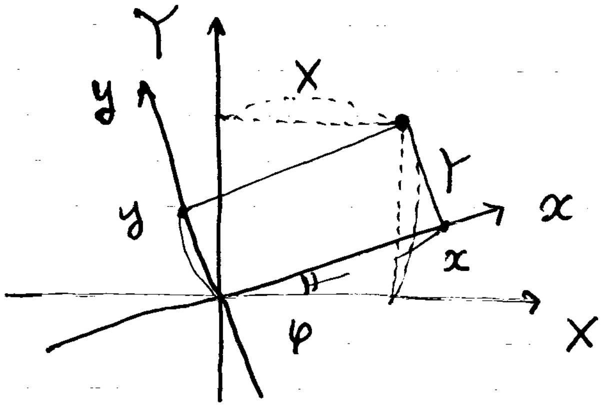
回転している座標系

⇓

「便利」な時があるから

$$
\begin{cases}
\text{静止系} : & \mathbb{R} \equiv (X, Y, Z) \\
\text{回転系} : & \mathbb{r} \equiv (x, y, z)
\end{cases}
$$

● Z軸回りの回転



$$
\begin{cases}
\text{回転角} & \varphi \\
\text{角速度} & \dot{\varphi} \equiv \omega
\end{cases}
$$

図より

$$
\begin{cases}
X = x \cos\varphi - y \sin\varphi \\
Y = y \cos\varphi + x \sin\varphi
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x = X \cos\varphi + Y \sin\varphi \\
y = Y \cos\varphi - X \sin\varphi
\end{cases}
$$

(行列でかくと)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{cases}$$

3次元にすると

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}}_{= \mathbb{R}}$$

$$\dot{\mathbb{r}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbb{R}} + \boxed{\begin{pmatrix} -\dot\varphi\sin\varphi & \dot\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\dot\varphi\cos\varphi & -\dot\varphi\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}}$$

$$= (-\dot\varphi) \begin{pmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{r}$$

よ，2

$$\boxed{\text{第2項} = -\dot\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{r}}$$

これより
$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}}$$

ここで $\boldsymbol{\omega} \equiv (0, 0, \dot{\varphi})$ と定義すると

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -y\dot{\varphi} \\ x\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

よって

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\therefore \boxed{\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}}}$$

これを2乗すると

$$(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \dot{\mathbf{R}}^2$$

No.

Date

◎ 静止系での運動エネルギー T

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbb{R}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbb{r}} + \omega \times \mathbb{r})^2$$

(注)

$$\left| \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbb{R}} \right|^2$$

$$= \dot{\mathbb{R}}^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\mathbb{R}}^2$$

直交行列

【行列の計算】 $$|A\dot{\mathbb{R}}|^2 = \dot{\mathbb{R}}^t \underbrace{A^t A}_{=1} \dot{\mathbb{R}}$$

$$= \dot{\mathbb{R}}^2$$

但し $\boxed{\dot{\mathbb{R}}^t \equiv (\dot{R}_x, \dot{R}_y, \dot{R}_z)}$ $\boxed{\dot{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \dot{R}_x \\ \dot{R}_y \\ \dot{R}_z \end{pmatrix}}$

◎ 回転系での運動方程式

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{r}}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\right)$$

Lagrange方程式は $\displaystyle \underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}}$

ここで $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\omega} + m\omega^2\mathbf{r} - m(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}$$

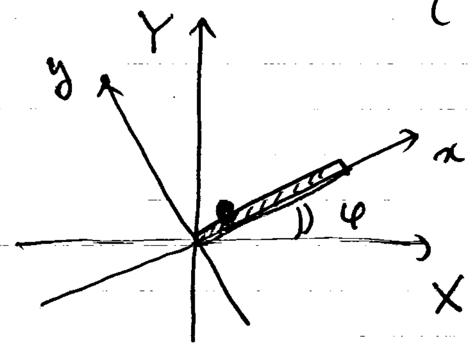
よって

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{2m\dot{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{\omega}}_{\text{コリオリ}} + \underbrace{m\omega^2\mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})}_{\text{遠心力}}}$$

◎ z-軸の回転 $(\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega))$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

[例題] 回転している棒に拘束されている質点の運動
(摩擦はない)



$$\omega = \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2 x \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2 y \end{cases}$$

(棒を x 軸におく)

x 軸に拘束 $\Rightarrow$ $\boxed{y=0}$

$$\therefore \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

一般解は $x = A \sinh \omega t + B \cosh \omega t$

$$\left(\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \right)$$

(a) $t=0$ で $x=0$, $\dot{x} = v_0$ とすると

$$\underline{x = \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t}$$ と求まる

(b) これを (X, Y) 系に直すと

$$\begin{cases} X = \dfrac{v_0}{\omega} \sinh \omega t \, \cos \omega t \\ Y = \dfrac{v_0}{\omega} \sinh \omega t \, \sin \omega t \end{cases}$$

となっている