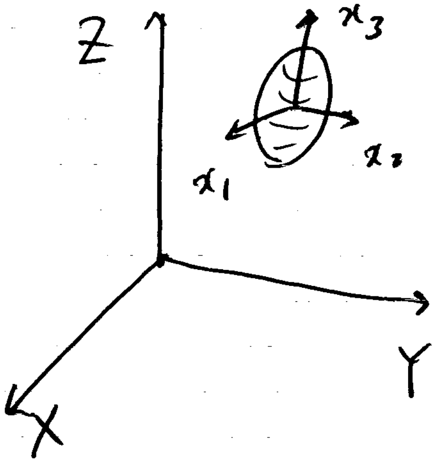
7-2 剛体のLagrangian



運動座標系

↑ (x_1, x_2, x_3)

剛体と一緒に回転する系

◎ 剛体をN個に分割する

「つぶつぶ」を質点とみなす.

剛体の運動エネルギー T を回転系で書くと

$$\boxed{T = \sum_N \frac{1}{2} m_N \left(\dot{\mathbf{r}}_N + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N \right)^2}$$

$\boldsymbol{\omega}$: 回転角速度

↑

剛体と一緒に回転している

⇓

($\boldsymbol{\omega}$は時間の関数)

- $\mathbf{r}_N$ の測り方 : 重心（慣性中心）から測る
- $\dot{\mathbf{r}}_N = \mathbf{V}$ = 重心の速度

これより

$$T = \frac{1}{2}\sum_N m_N (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_N m_N \mathbf{V}^2 + \sum_N m_N \mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_N + \frac{1}{2}\sum_N m_N (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_N)^2}$$

- $M \equiv \sum m_N$ 剛体の質量
- 重心を原点： 第2項 $= \sum m_N \mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_N$

$$= \mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}\cdot\underbrace{\sum_N m_N \mathbf{r}_N}_{\text{(重心座標)}} = 0$$

よって

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m_N (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_N)^2}$$

（剛体の並進運動）　　（剛体の回転）

No.

Date

【剛体の回転エネルギー】

$$L_R = \frac{1}{2}\sum_N m_N (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N)^2$$

剛体の運動 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\omega}$ によって記述される

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)}$$ とする

$$L_R = \frac{1}{2}\sum_N m_N \left(\omega^2 r_N^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_N)^2\right)$$

連続体 $\Rightarrow$ $\left(\sum_N \Rightarrow \int d^3r\right)$

$$\boxed{\sum_N m_N = \int \rho(\mathbf{r})\, d^3r = M}$$

$$\boxed{L_R = \frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r}) \left(\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2\right) d^3r}$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$ とする

$$\begin{cases} \omega^2 = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \omega_j \delta_{ij} \\ \left(\sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \omega_j x_i x_j \end{cases}$$

よって

$$L_R = \frac{1}{2} \int \rho(r) \left[\sum_{i,j=1}^{3} \left(\omega_i \omega_j \delta_{ij} r^2 - \omega_i \omega_j x_i x_j \right) \right] d^3r$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \omega_j \int \rho(r) \left[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right] d^3r$$

$(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$

ここで I_{ij}（慣性モーメント）を定義する

$$\boxed{I_{ij} \equiv \int \rho(r) \left[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right] d^3r}$$

このとき

$$\boxed{L_R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} \omega_i \omega_j}$$

となる