7-3 慣性テンソル

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right] d^3r$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$$

慣テンソル（モーメント）という。

$$I_{ij} \Rightarrow \begin{Bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{Bmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$ 行列（対称）

例えば

$$I_{11} = I_{xx} = \int \rho(\mathbf{r}) \left(r^2 - x^2 \right) d^3r$$

$$\therefore I_{11} = \int \rho(\mathbf{r}) \left(y^2 + z^2 \right) d^3r$$

同様に

$$\begin{cases} I_{22} = I_{yy} = \int \rho(\mathbf{r}) \left(z^2 + x^2 \right) d^3r \\ I_{33} = I_{zz} = \int \rho(\mathbf{r}) \left(x^2 + y^2 \right) d^3r \end{cases}$$

I_{ij} は 対称行列

i.e. $\boxed{I_{ij} = I_{ji}}$

対称行列の固有値は実数

⇓

軸を適当に選ぶと

I_{ij} は 対角になってできる

◎ 対称行列 $A^t = A$ $(A^t)_{ij} = A_{ji}$

エルミート行列 $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$

◎ $\boxed{\text{対称行列は エルミート行列の一部}}$

$*$ は 複素共役

◎ エルミート行列の固有値は実数

$A^\dagger = A$ $(A^*_{ji} = A_{ij})$

A を 3行3列の行列とする

行列 A の固有値方程式は

$\boxed{A u = a u}$

ここで $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$A\mathbf{u} = a\mathbf{u}$ を式分でかくと

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3} A_{ij} u_j = a u_i} \quad (i=1,2,3)$$

この式●に左から u_i^* をかけて i で和をとる

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} u_i^* A_{ij} u_j = a \sum_{i=1}^{3} u_i^* u_i = a \sum_{i=1}^{3} |u_i|^2$$

A はエルミート $\Longrightarrow$ $\underline{A_{ij} = A_{ji}^*}$

よって 左辺は

$$\sum_{i,j=1}^{3} u_i^* A_{ji}^* u_j = \sum_{i,j=1}^{3} (A_{ji} u_i)^* u_j$$

ー方 $\left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij} u_j\right)^* = a^* u_i^*$ より

$$= \sum_{j=1}^{3} a^* u_j^* u_j = a^* \sum |u_j|^2$$

よって $\boxed{a = a^*}$ $\Longrightarrow$ a は実数

[慣性テンソル I_{ij}]

x_1, x_2, x_3 を軸を適当に選ぶと

対称行列の固有値は対角的

$$\boxed{I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} I_{11}, I_{22}, I_{33} & : & \text{主慣性モーメント} \\ x_1\ x_2\ x_3 & : & \text{慣性主軸} \end{array} \right] \text{という}$$

◎ 剛体の運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\, \omega_i \omega_j$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \left(I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2 \right)}$$

となる。