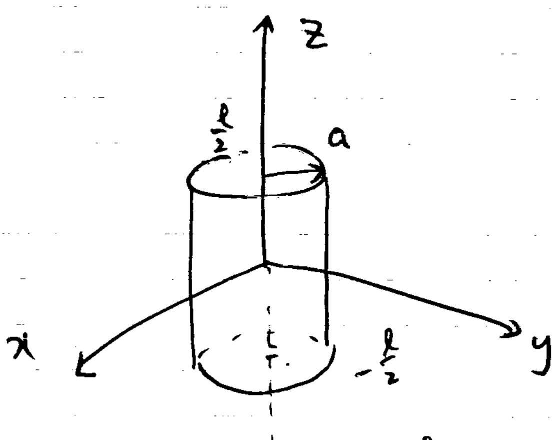
7-4 慣性モーメントの計算

慣性モーメント (重心の回り)

$$
\begin{cases}
x\text{軸の回り}: & I_{xx} = \int \rho(r)(y^2+z^2)\, d^3r \\
y\ 〃 : & I_{yy} = \int \rho(r)(z^2+x^2)\, d^3r \\
z\ 〃 : & I_{zz} = \int \rho(r)(x^2+y^2)\, d^3r
\end{cases}
$$

① 半径 a，長さ l の円筒 (重心の回り)
[質量 M, 密度 ρ (一定)]



$$M = \rho \pi a^2 l$$

◎ 非対角要素はゼロ
e.g.

$$I_{xy} = -\int \rho\, xy\, d^3r$$

$$\therefore\ I_{xy} = -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr\ r\cos\varphi\ r\sin\varphi$$

$$= -\frac{1}{4}\rho l a^4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = 0$$

◎ 対角要素

$$I_{zz} = \int \rho \, (x^2+y^2) \, d^3r$$

$$= \rho \int_0^a r^2 r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz = \rho l \frac{1}{4} a^4 2\pi$$

$$\therefore \underline{I_{zz} = \frac{1}{2} M a^2} \qquad (M = \rho \pi a^2 l \text{ より})$$

I_{xx} と I_{yy} は対称性より x と y のみに同じ

$I_{xx} = I_{yy}$ よって

$$I_{xx} = \frac{1}{2} \left[I_{xx} + I_{yy} \right] = \frac{\rho}{2} \int (y^2+z^2+z^2+x^2) \, d^3r$$

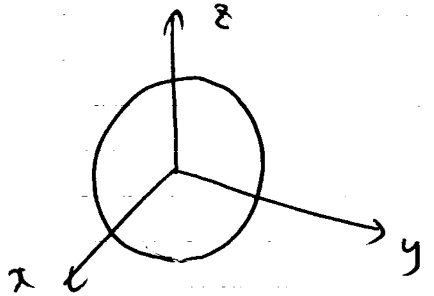
$$= \frac{\rho}{2} \int r^2 d^3r + \frac{\rho}{2} \int 2z^2 d^3r$$

$$\therefore \underline{I_{xx} = \frac{1}{4} M a^2 + \frac{1}{12} M l^2}$$

ここで $a \to 0$ とすると $\underline{I_{zz} = 0 , \; I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} M l^2}$

これは棒の場合になる

② 半径 a の球, 質量 M (重心の回り)



対称性より

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

よって

$$I_{xx} = \frac{1}{3}\left(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}\right)$$

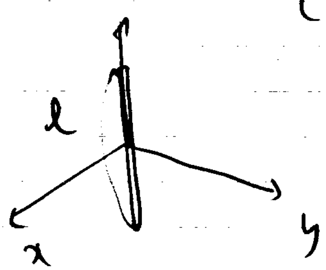
$$= \frac{1}{3}\rho \int \left(y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2\right) d^3r$$

$$= \frac{1}{3}\rho \int 2r^2 \, r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{8\pi}{15}\rho a^5 = \underline{\frac{2}{5} M a^2}$$

(但し $M = \rho \frac{4\pi}{3} a^3$)

③ 長さ l, 線密度 λ の棒, 質量 M
(重心の回り)



$$I_{zz} = 0$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda z^2 dz = \frac{\lambda}{12} l^3$$

$$\therefore \underline{I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12} M l^2}$$

(但し $M = \lambda l$)

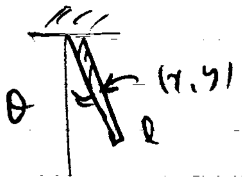
【重心の回りと先端での慣性モーメントの関係】

1. 棒の場合 (長さ l, 質量 M)

$$\begin{cases} \text{重心の回り} : & I_G = \underline{\dfrac{1}{12} M l^2} \\ \text{先端} : & I_E = \displaystyle\int_0^{l} \lambda z^2 dz = \underline{\dfrac{1}{3} M l^2} \end{cases}$$

【この差は何か？】 → 重心の運動エネルギーである

重心の運動エネルギー



$$T_{cm} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{l}{2}\cos\theta \\ y = \dfrac{l}{2}\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dfrac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore\ T_{cm} = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 = \underline{\underline{\frac{1}{8} M l^2 \dot{\theta}^2}} = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

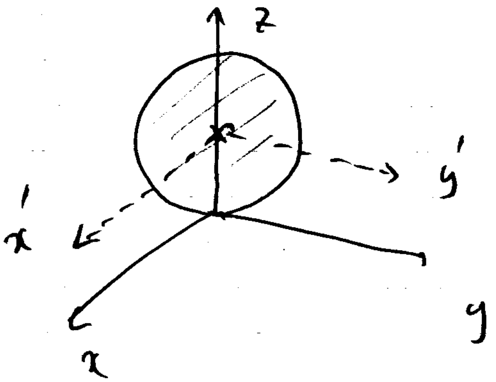
$$\boxed{I_0 = \frac{1}{4} M l^2}$$

ところが

$$\underline{\underbrace{I_E}_{\frac{1}{3}Ml^2} = \underbrace{I_G}_{\frac{1}{12}Ml^2} + \frac{1}{4} M l^2}$$

すなわち $I_E = I_G + I_0$

2. 球の場合



座標系 (x'y'z') は球の重心とする

$$\therefore \boxed{z' = z - a}$$

I_{zz} は変わらない!!

$$I_{xx} = \rho \int (y^2 + z^2)\, d^3r'$$

$$= \rho \int \left(y'^2 + (z' + a)^2 \right) d^3r'$$

$$= \rho \int (y'^2 + z'^2)\, d^3r' + \rho \int (\underbrace{2z'a}_{0} + a^2)\, d^3r'$$

$$\therefore \boxed{I_{xx} = \frac{2}{5} M a^2 + M a^2}$$

重心の運動エネルギー