7-5 剛体の運動方程式

No. 1/17

79

剛体の角運動量 $\mathbb{M}$

↑

剛体の回転

◎ 粒子の角運動量 $\mathbb{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

◎ 剛体の角運動量 $\mathbb{M}$

$$\mathbb{M} = \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \, d^3r$$

$$(\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\therefore \mathbb{M} = \int \rho(\mathbf{r}) \left[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right] d^3r$$

$$= \int \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right] d^3r$$

成分表示すると

$$M_i = \int \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 \underbrace{\omega_i}_{= \sum_{j=1}^{3} \omega_j \delta_{ij}} - x_i \sum_{j=1}^{3} x_j \omega_j \right] d^3r$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \omega_j \int \rho(\mathbf{r}) \left[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right] d^3r$$

慣性モーメント

$$I_{ij} = \int \rho(r) \left[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right] d^3r$$

という

$$\boxed{M_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_j I_{ij}}$$

慣性主軸を選ぶと

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

よって $M_i = \omega_i I_i$

[Lagrange からみると]

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j$$

$$(\omega_i = \dot{\varphi}_i)$$

角運動量 M_i

$$M_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \omega_i}$$

よって

$$\underline{\underline{M_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_j\, I_{ij}}}$$