7-7 コマの運動

● 対称コマ

$\Updownarrow$

$\boxed{I_1 = I_2}$ (但し $I_3 \neq I_1$)

($\underbrace{I_1 = I_2 = I_3 \text{ は球}}$)

● コマの運動について

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2$$

但し
$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi \\ \Omega_2 = -\dot{\theta} \sin\psi + \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi \\ \Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{cases}$$

力が働かない時 $U = 0$

$\therefore$

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi})^2$$

◎ Lagrange 方程式

$$
\begin{cases}
\varphi; & \dfrac{d}{dt}\left[I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} + I_3 \cos\theta \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\right] = 0 \\
\psi; & \dfrac{d}{dt}\left[I_3 \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\right] = 0 \\
\theta; & \dfrac{d}{dt}(I_1\dot{\theta}) = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_3 \dot{\varphi}\sin\theta\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)
\end{cases}
$$

上の2つの式 ⟹ 保存

$$
\begin{cases}
I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} + I_3 \cos\theta \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) = C \\
I_3 \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) = M_3
\end{cases}
$$

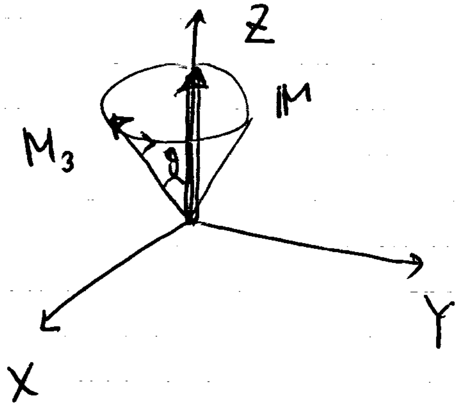
(C, M_3 は定数)

このことより θ に対する式は

$$
\boxed{I_1 \ddot{\theta} = I_1 \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\, M_3}
$$

となる。

コマの角運動 M の方向を Z 軸ととる



$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C = I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} + I_3 \cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$M_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}) = M\cos\theta$$

(図より明らか)

よって

$$M = I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} + \cos^2\theta\, M$$

$$\therefore\ M(1 - \cos^2\theta) = I_1 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$$ より

$$\boxed{M = I_1 \dot{\varphi}}$$

【 θ に対する方程式 】

$$I_1\ddot{\theta} = I_1 \frac{M^2}{I_1^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{M}{I_1}\sin\theta \, M\cos\theta = 0$$

$\therefore\ \dot{\theta}$ = 定数 $\equiv B$ とする

全エネルギー E

$$E = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \right)^2$$

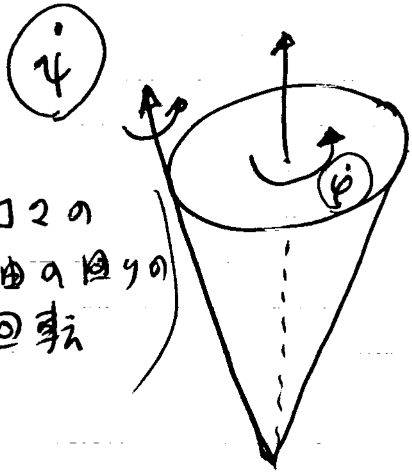
$$\therefore\ E = \frac{1}{2} I_1 \left(B^2 + \frac{M^2}{I_1^2}\sin^2\theta \right) + \frac{M^2}{2I_3}\cos^2\theta$$

E, B, M は定数

これより

$$\boxed{\theta = \text{一定}}$$

【回転のピクチャー】

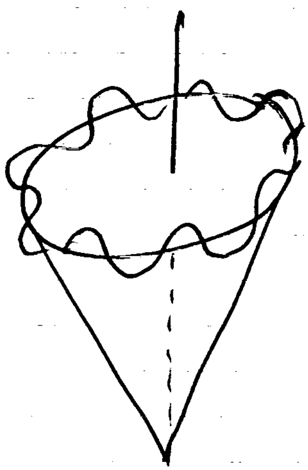


(コマの軸の回りの回転)

$\dot{\varphi}$: 歳差運動

(Precession)

【θの運動は ?】



θの運動

↓

章動 (Nutation)

◎ Euler 方程式

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ に対する方程式

$$L = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \Omega_2 = -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \Omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi \end{cases}$$

◎ ψ に対する式 : $\boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \dfrac{\partial L}{\partial\psi}}$

ここで

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{\partial L}{\partial\Omega_1}\cdot\frac{\partial\Omega_1}{\partial\dot\psi} + \frac{\partial L}{\partial\Omega_2}\cdot\frac{\partial\Omega_2}{\partial\dot\psi} + \frac{\partial L}{\partial\Omega_3}\cdot\frac{\partial\Omega_3}{\partial\dot\psi}$$

$$= I_3\Omega_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = \frac{\partial L}{\partial\Omega_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\psi} + \frac{\partial L}{\partial\Omega_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\psi} + \frac{\partial L}{\partial\Omega_3}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\psi}$$

$$= I_1\Omega_1(-\dot\theta\sin\theta + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi)$$

$$+ I_2\Omega_2(-\dot\theta\cos\psi - \dot\varphi\sin\theta\sin\psi)$$

$$= (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2$$

$$\therefore \quad \boxed{I_3\frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2}$$

z軸の選び方は自由
よって対称性より

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} &= (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} &= (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} &= (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 \end{aligned}}$$

Euler方程式という

[地球の自転]

92

地球はほとんど球：しかし $\underset{\sim\sim\sim}{I_1 = I_2 \neq I_3}$

$I_1 = I_2$ より　$\Omega_3 =$ 定数 $\equiv \omega$ とおく

$\left(\uparrow \ \frac{2\pi}{\omega} = T = 1 \text{日} \right)$

Euler方程式より

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{1}{I_1}(I_1 - I_3)\omega\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = -\frac{1}{I_1}(I_1 - I_3)\omega\Omega_1 \end{cases}$$

$\Delta\omega \equiv -\frac{1}{I_1}(I_1 - I_3)\omega$ と定義すると

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = -\Delta\omega\,\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 = \Delta\omega\,\Omega_1 \end{cases}$$

その解は $\begin{cases} \Omega_1 = A\sin(\Delta\omega t) \\ \Omega_2 = A\cos(\Delta\omega t) \end{cases}$　Aは定数

$\left| \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right| \simeq \frac{1}{305}$ (観測値)

よって $\boxed{\frac{1}{\Delta\omega} \simeq 305\,\frac{1}{\omega}}$

⇙

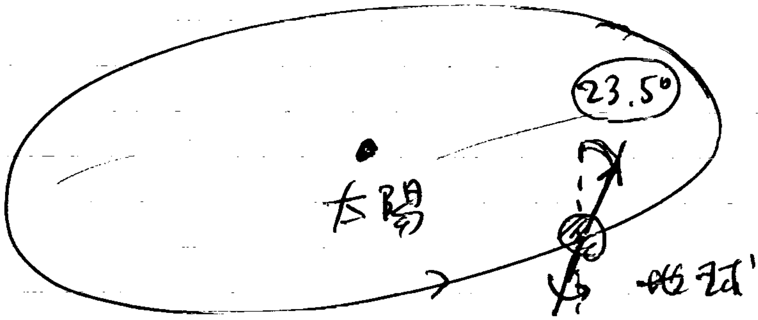
(305日で1周する

観測値　440日で1周)

Date

【地球の公転】

地球の自転軸
公転面に対して $\boxed{23.5°}$ 傾いている



・地球は太陽と月から潮汐力を受ける
↑
地球の有限サイズ

$$U \simeq -\alpha \cos^2\theta$$

⇓ 自転軸の歳差運動を引き起こす

$\boxed{\text{歳差} \sim 26000\text{年}}$ の周期