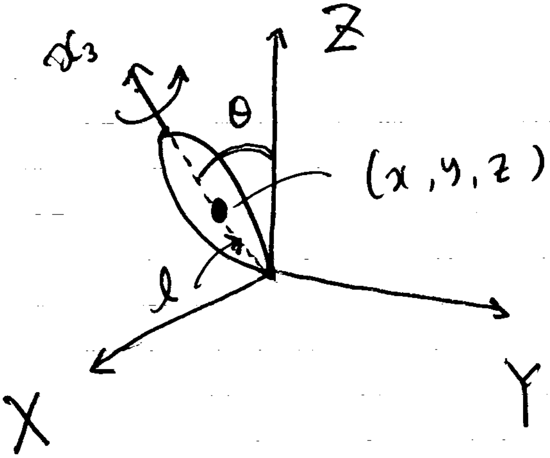
7-8 重力場中の対称コマ



固定コマ

質量 M

固定点から重心まで l

対称コマ $I_1 = I_2 \neq I_3$

[I_1, I_3 は重心の回りの慣性モーメント]

$$L = T_{rot} + T_{CM} - Mgl\cos\theta$$

回転エネルギー　重心運動のエネルギー

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \right)^2$$

$$T_{CM} = \frac{1}{2} M l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right)$$

$$\frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} M l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \right)$$

$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

よって

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\tilde{I}_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - Mgl\cos\theta}$$

但し $\underline{\tilde{I}_1 = I_1 + Ml^2}$

◎ Lagrange 方程式

$$\begin{cases} \theta; & \dfrac{d}{dt}\left(\tilde{I}_1\dot{\theta}\right) = \tilde{I}_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot{\varphi}(-\sin\theta)(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) + Mgl\sin\theta \\ \varphi; & \dfrac{d}{dt}\left[\tilde{I}_1\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + I_3\cos\theta\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\right] = 0 \\ \psi; & \dfrac{d}{dt}\left[I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\right] = 0 \end{cases}$$

自明な保存量

$$\begin{cases} I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) \equiv \tilde{I}_1 a \quad \text{とおく} \\ \tilde{I}_1\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + I_3\cos\theta\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) \equiv \tilde{I}_1 b \quad \text{とおく} \end{cases}$$

(a, b は初期条件できまる量)

よって

$$\hat{I}_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + \cos\theta \hat{I}_1 a = \hat{I}_1 b$$ より

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$

$\dot{\psi}$ について求めると

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{\hat{I}_1}{I_3} a - \frac{(b - a\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$

エネルギー保存の式に代入する

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \hat{I}_1 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \right) + \frac{\hat{I}_1^2}{2I_3} a^2 + Mgl\cos\theta}$$

ここで $E' \equiv E - \dfrac{\hat{I}_1^2}{2I_3} a^2$ とおくと

$$\boxed{\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + (b - a\cos\theta)^2 + \frac{2Mgl}{\tilde{I}_1}\sin^2\theta\cos\theta = \frac{2E'}{\tilde{I}_1}\sin^2\theta}$$

よって　$\alpha \equiv \dfrac{2E'}{\tilde{I}_1}$, $\beta \equiv \dfrac{2Mgl}{\tilde{I}_1}$ とおく

$$\boxed{\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 = \sin^2\theta\,(\alpha - \beta\cos\theta) - (b - a\cos\theta)^2}$$

この式がコマに対する基本方程式である

$\boxed{x = \cos\theta}$ を導入する。

$$\boxed{\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - \beta x) - (b - ax)^2}$$

但し　$|x| \le 1$

実際は　$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$　より

$\boxed{0 \le x \le 1}$　また　$\boxed{\begin{array}{l}\alpha > 0 \\ \beta > 0\end{array}}$

ここで

$$f(x) \equiv (1-x^2)(\alpha-\beta x)-(b-ax)^2$$

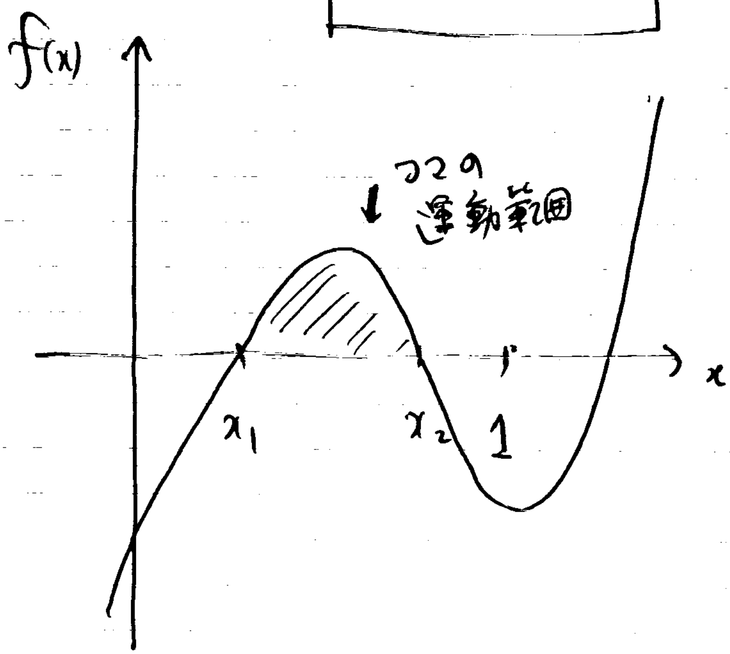
と定義すると

$\boxed{\dot{x}^2 = f(x)}$ が解きたい方程式

$\boxed{0 \leq x \leq 1}$

◉ コマの運動

$\Longrightarrow \boxed{f(x) > 0}$



$x_1 \leq x \leq x_2$

〚才差運動〛

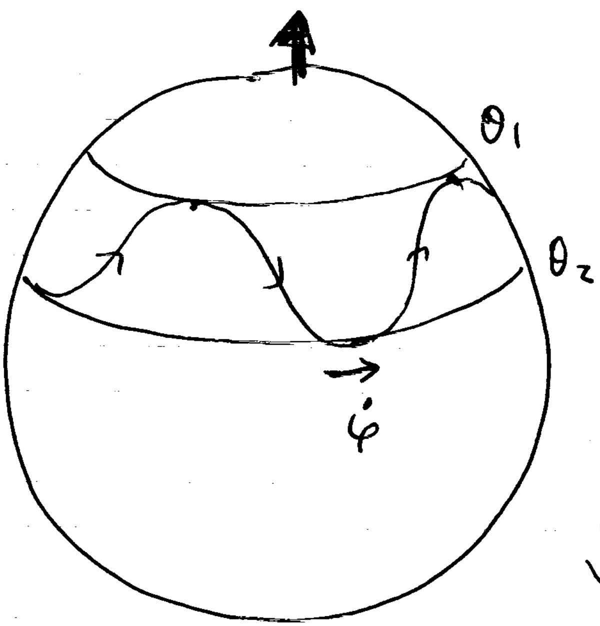
$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{b - ax}{1 - x^2}$$

[case 1]　$\frac{b}{a} > x_2$ のとき

$\frac{b}{a} > x_2 > x$　（x_2は最大値）

よってこのときは $\boxed{\dot{\varphi} > 0}$

φは常に増大する



θの運動
↓
章動という

φの運動
↓
才差運動という

[case 2]　　$x_1 < \frac{b}{a} < x_2$ のとき

(a)　x が x_2 の近く

よって　$x > \frac{b}{a}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dot{\varphi} < 0}$

(b)　x が x_1 の近く

よって　$x < \frac{b}{a}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\dot{\varphi} > 0}$