第5章　物理学の展望

物理学はいくつかの基本法則をもとにして自然現象を理解しようとする学問である．そこで最も重要な役割を果たしているのは，相対性原理である．相対性原理とは，どの慣性系でも，基本法則は同様に成り立ち，いかなる観測量も同じであるというものである．我々の持っている４つの基本方程式は全てこの相対性原理を満たしている．この我々が持っている方程式は「場の方程式」である．ただ，Newton 方程式は質点の座標に対する方程式であるが，しかしこれも Schrödinger 方程式から場の期待値を取る事により Newton 方程式が導かれる事から，全ては場の理論が基本であると考えて良い．その場合，結局 Maxwell 方程式が全ての出発点であり，ある意味ではこれを原理と考えても良いと思われる．

この章は少し数学を使った解説が多くなっており，物理の専門家以外にはあるいは難しすぎると感じるかも知れない．今後の物理の方向を考え，それをより具体的に解説する事が重要であると考えたために，これから物理を学ぼうとしている若手を念頭において解説している．

5.1　量子化

長い間，古典力学が物理学の基本であると人々は思っていたし，それはそれで道理に適っているとも言える．実際，科学の歴史からすれば，これは当然の事である．Newton 力学が出発点であり，量子力学もその古典力学から求められたものである．しかしながら，科学史は別にして，現代の我々が考える物理は歴史にとらわれる必要はない．すなわち，古典力学から出発する必要は無いのである．実際，Maxwell 方程式を見てみると，これはすでに場の理論である事は誰でも知っているし，逆に言えば電場や磁場から「場」という概念が生まれたわけである．この場合，非常に重要な事が Maxwell 方程式から伺う事が出来る．それは Maxwell 方程式は「量子化を知っている」という事である．Maxwell 方程式には逆に言えば古典力学に対応する方程式が存在していない．

これは最初から量子化された方程式なのである．この事は昔からわかっていた事であり，新しい事でも何でもない．しかしながら，この事実がはっきりと認識されたのは，ごく最近の事であると言って良い．

Maxwell 方程式が基本方程式であるとすると，古典力学のハミルトニアンを量子化して Schrödinger 方程式を求める際に使っている式 $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ はその根拠を失う事になる．結果的には，古典力学のハミルトニアンから上式の量子化の手法により Schrödinger 方程式が求められるが，しかしだからといって量子化の過程が基本的であるという事にはならない．これまで，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える手法を「量子化の原理」と考えてきたが，明らかにこれは原理ではなくて，結果である事が Maxwell 方程式から良くわかるのである．さらには， Schrödinger 方程式を導出する際に，この置き換えの手法だと状態 ψ が何故あらわれるのかと言う質問に答えられていない．量子力学の講義で学生に教えるのは，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える限り，その微分がなされる状態を用意する必要があり，これが ψ である，という言い訳をして説明するが，しかし，これが取ってつけた様な言い訳であると言う事は，誰でも感じる事である．しかしながら Schrödinger 方程式が実験を良く再現している限り，物理的にはそれ程深刻な問題ではない事も確かである．

5.2 Dirac 方程式の導出 (Dirac の手法)

量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式が Dirac 方程式を非相対論の近似をする事により求められる事は良く知られている．従って，Maxwell 方程式を出発点 (原理) にして，Dirac 方程式が導けられたらこれは最も合理的なものとなる．そして，実際この事が可能なのである．但し，もう一つ条件をおく必要があり，それがゲージ不変性である．Maxwell 方程式がゲージ不変になっているので，電磁場がフェルミオンと相互作用する時，全 Lagrangian 密度がゲージ不変である事を要求すると，確かに Dirac の Lagrangian 密度が決定される事がわかっている．

Maxwell 方程式を原理にして Dirac 方程式を導く事がどの様にしたら可能であるかを以下に議論して行こう．しかし，その前に Dirac がその方程式を導いた直感的な方法について解説しよう．

5.2.1 Dirac 方程式の直感的導出法

Dirac 方程式は相対論的なフェルミオンを記述する理論であり，現在までのところ，最も信頼できる理論体系の一つである．結局，相対性理論 (Lorentz 変換) と矛盾しない理論が正しいものである限り，基本的な方程式は相対論的な方程式であるべきである．

Dirac はまずエネルギーと質量に関するアインシュタインの関係式 (分散関係式) から出発した．$E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2$ である．ここで，今考えているのは，質量 m を持ち，その運動量が $\boldsymbol{p}$ である質点であり，相互作用は仮定されていない．この時，Dirac はこの分散関係式を因数分解する事にした．それはエネルギーの１次式を得たかったからである．Dirac の因数分解は次のようになされた．

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 - m^2c^4 = (E - c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} - mc^2\beta)(E + c\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta) = 0 \tag{5.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\alpha}$ と β は４行４列の行列であり，具体的には

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と書かれていて，ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列と呼ばれている２行２列のエルミート行列であり，次のように書かれている．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って，Dirac 方程式は因数分解されたうちの一つを取れば十分なので，

$$\left(-i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta\right)\Psi(t,\boldsymbol{r}) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \tag{5.3}$$

となり，これがフェルミオンを記述する Dirac 方程式である．この時，運動量とエネルギーを微分演算子にする通常の手法を採用している．なお，電子がクーロンポテンシャル中を運動する場合，すなわち水素原子の場合は Dirac 方程式が

$$\left(-i\hbar c\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta - \frac{e^2}{r}\right)\Psi(t,\boldsymbol{r}) = i\hbar\frac{\partial\Psi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \tag{5.4}$$

と書かれている．この場合のエネルギー固有値は実験を見事に再現している．

5.3 Dirac 方程式の新しい導出法

量子化として知られてきた式

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.5}$$

がその根拠をなくした場合は，Dirac が導出した手法は使えなくなる．科学史的には勿論問題ないが，しかし他のもう少ししっかりした導出法を考える必要がどうしてもでてくるものである．以下に解説する手法は，Maxwell 方程式を指導原理として，さらにはそこで見つかったゲージ不変性を原理として利用して行くものである．基本的には，電磁場と Dirac 場が相互作用している Lagrangian 密度をゲージ不変である事を要求する事によって求めて行くと言うものである．以下においては，再び $\hbar = 1$，$c = 1$ の表示に戻る事にしよう．

5.3.1 電磁場の Lagrangian 密度

出発点は Maxwell 方程式である．これを基本原理とする．この Lagrangian 密度を書くと

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.6}$$

ここで A^μ はゲージ場であり，$F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{5.7}$$

と書かれている．この $F^{\mu\nu}$ は計算してみれば直ちにわかる事だが，実は電場と磁場そのものである．例えば，F^{01} は

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x} = E_x \tag{5.8}$$

であるから，電場をあらわしている．また，F^{12} は

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial y} = -B_z \tag{5.9}$$

であるから，磁場をあらわしている．また，Lagrange 方程式から

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu \tag{5.10}$$

が求まり，これはベクトルポテンシャル A_0，$\boldsymbol{A}$ で書いた Maxwell 方程式そのものである．

5.3.2 ゲージ不変性

上記で求めた Lagrangian 密度の第２項 $-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換に対して不変である．

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.11}$$

ここで $\chi(t,\boldsymbol{r})$ は任意の関数であり，確かに $-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は，ゲージ変換してもその後 $\chi(t,\boldsymbol{r})$ には依っていない．ところが，Lagrangian 密度の第１項 $gj^\mu A_\mu$ はゲージによってしまう．これは明らかで，ゲージ変換に対して

$$gj^\mu A'_\mu = gj^\mu A_\mu + gj^\mu\partial_\mu\chi(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.12}$$

となり，ゲージ変換の後の Lagrangian 密度は $\chi(t,\boldsymbol{r})$ という非物理量に依ってしまい，ゲージ不変ではない事がわかるのである．

5.3.3 ゲージ不変な Lagrangian 密度

それではゲージ不変な Lagrangian 密度は作ることが出来るのであろうか？それは可能であり，以下に解説して行こう．まずは物質による電流密度 j_μ であるが，$\psi^\dagger$ と ψ で４元ベクトルを作ろうとすると，数学的にこれはどうしても ψ が４個の成分を持っていることが必要条件である事がわかっている．この場合，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

$$\psi^\dagger = (\,\psi_1^\dagger \quad \psi_2^\dagger \quad \psi_3^\dagger \quad \psi_4^\dagger\,) \tag{5.14}$$

として，これから $\psi_i^\dagger\psi_j$ を作ると１６個あるわけだが，これらは，$\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma_0$ と定義した表現を使うと Lorentz 変換に対する性質から

$$\bar\psi\psi \ \ (\mathrm{scalar}), \quad \bar\psi\gamma_\mu\psi \ \ (\mathrm{vector}), \quad \bar\psi\gamma_5\psi \ \ (\mathrm{pseudo-scalar}), \quad \bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi \ \ (\mathrm{axial-vector})$$

それにテンサー $\frac{i}{2}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ に分類される．但し，γ_μ はガンマ行列である．Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現を具体的に書くと，

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

と書ける．この事より，フェルミオンの４元ベクトルは確かに作られ，

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{5.16}$$

と書けるのである．

それでは，ゲージ変換をした時にゲージ不変を破る項をフェルミオンに対応する Lagrangian 密度を入れる事により消去する事が出来るのであろうか？答えは簡単で次のような項 $\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi$ を付け加えれば良い

$$\mathcal{L} = C_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.17}$$

ここで C_1 は定数であり，また j_μ は $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ と置き換えてある．この時，ゲージ変換はフェルミオンの部分の位相も変換させる事にして

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi, \qquad \psi' = e^{-ig\chi}\psi \tag{5.18}$$

と変換すると

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\partial_\mu\gamma^\mu\psi' - g\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'^\mu - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \tag{5.19}$$

となり，χ にはよらない Lagrangian 密度が得られている．但し，χ による項を打ち消す合うために $C_1 = i$ と取っている．この Lagrangian 密度に質量項を足す事はゲージ不変性を壊す事にならないので最終的な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.20}$$

となり，質量 m のフェルミオンがゲージ場と相互作用する Lagrangian 密度が求められた事になる．ここで，質量 m と結合定数 g は実験から決定されるべきものである事は言うまでも無い．

5.4　古典場の理論

Dirac 方程式が場の方程式として基本原理から導かれた事は非常に重要である．これは第一量子化と言われて来た式

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{5.21}$$

が原理ではないと言う事を意味している．この事は実は色々なところで考え直しを要求してくる．特に，これまで Klein-Gordon 方程式と呼ばれている

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \tag{5.22}$$

はスカラー場に対する方程式である．この方程式は

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2 + m^2 = (-\hbar^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right) = 0 \tag{5.23}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \tag{5.24}$$

という第一量子化による置き換えにより得られたものであるが，この式がもはやその根拠を失う事になる．すなわち，Klein-Gordon 方程式は基本方程式ではあり得ないのである．この事は，結局，基本原理としては常に場の理論から出発するべきであると言う事を意味している．

5.4.1　実スカラー場

実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\psi = 0 \tag{5.25}$$

であるが，これは不思議な方程式である． Schrödinger 方程式の場合，波動関数 ψ は常に複素数である．これは Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{5.26}$$

を見れば明らかで，ψ^* に対する方程式は

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H\psi^* \tag{5.27}$$

となって，異なる方程式になっている．この事は，確かに ψ と ψ^* が独立である事を示している．

非相対論の極限

ところが，Klein-Gordon 方程式における ψ は実スカラーで良いことが方程式から明らかである．しかし，この場合本当に実スカラーで良いのであろうか？ここで，数学と物理学の違いが顕著に現れてくると思われる．数学的には勿論，実スカラーで良い事は，誰でもチェックできる事である．しかしながら，それではこの粒子の運動がゆっくりである時に非相対論の極限であるSchrödinger 方程式の解と一致しなくて良いのであろうか？良く知られているように， Schrödinger 方程式の解は常に複素数である．それは，解が常に

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = e^{-iEt}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{5.28}$$

と書く事ができ，これは実数になる事はあり得ないからである．従って，単純に Klein-Gordon 方程式の解 ψ を実スカラーと取ってしまうと非相対論の極限が存在しない相対論の方程式と言う事になってしまい，理論的な整合性がない事になる．

自由粒子の解

それでは実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は自由粒子の解を持っているのであろうか？時間によらない方程式をみると

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2\right)\phi(\boldsymbol{r}) = E^2\phi(\boldsymbol{r}) \tag{5.29}$$

となっている．これは， E^2 に対する固有値方程式となっている．従って，この場合，基本的には Schrödinger 方程式の場合と全く同じである．さらには，この方程式は運動量演算子と可換であるため，固有値問題としては，運動量の固有関数にもなっているべきである．すなわち，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{5.30}$$

を方程式の物理的な解として採用するべきである．ここで， $\omega = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}$ であり，また ϕ の次元を考えて $\sqrt{\omega}$ を分母に入れてある．従って，$\psi(t, \boldsymbol{r})$ は

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5.31}$$

となっている．

5.4.2　複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式

π 中間子はクォークと反クォークからできている複合粒子である．この π 中間子のスピンはゼロであり，ボソンに対応している．この場合，この π 中間子の重心運動を記述する方程式は何であろうか？結果的には，これはほとんど Klein-Gordon 方程式と同じ方程式により記述されるものと考えられる．理由は簡単で，クォークと反クォークから作られているので，これはクォークと反クォークの波動関数をぞれぞれ掛けたもの (直積) になっている．その重心運動を Dirac の波動関数で書き表したら，恐らくは Klein-Gordon 方程式と同じ形の方程式によって記述されるものと考えられる．そして，重心運動の解は

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{5.32}$$

という形で書かれるものと思われる．

5.4.3　電磁場とスカラー場の相互作用

基本粒子としてのスカラー場が存在していたとしたら，この粒子は電磁場とどのような相互作用をするのであろうか？Maxwell 方程式から出発して，ゲージ場 A_μ と結合出来るためには，どうしても４成分のスピノルである必要があった．従って，そのままでは，スカラー場が電磁場と相互作用する形を作る事は出来ないのである．当然の事であるが，スカラー場は他のスカラー場としか結合できない事は明らかである．

5.4.4　ゲージ場とスカラー場の相互作用

Maxwell 方程式から離れて，方程式のゲージ不変性だけを原理にすれば，スカラー場とゲージ場の相互作用を表す Lagrangian 密度を作る事は出来る．自由なスカラー場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \tag{5.33}$$

とした時，この上式にミニマル変換をすれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu - igA_\mu)\phi^\dagger\right]\left[(\partial^\mu + igA^\mu)\phi\right] \tag{5.34}$$

となり，ゲージ不変な Lagrangian 密度が求められた事になっている．しかしながら，現在までの所このように電磁場と相互作用する基本粒子としてのボソンは実験的に見つかっていない．その意味では，我々がこれまで築き上げてきた場の理論の中に入れるべき必要が何処にも無く，従って考える必要も無いものと思われる．

5.4.5 Higgs 機構とその問題点

このスカラー場の問題は Higgs 機構と密接な関係がある．Higgs 機構とは，まず，複素スカラー場を用意して，その複素スカラー場間に対称性を自発的に破るために導入されたポテンシャルを同じように考える．次に，変数変換とある種の近似を実行して，ゲージ不変性を Lagrangian 密度の段階で破ってしまうのである．そうするとゲージ場が質量を獲得して，弱い相互作用の模型が上手く作れて実験と良く合う理論体系にする事が出来たというものである．この描像には大きく分けて３つの深刻な問題点（間違い）がある．

(1) 実スカラー場の導入

最初に複素スカラー場を用意するのだが，対称性を破ると称して，この複素スカラー場を２つの実スカラー場に直してしまい，それぞれが自由度を持つという描像を提案するのである．しかし，これがおかしい事は上記の議論で明らかである．

(2) Higgs ポテンシャル

この Higgs 機構においては，自発的対称性の破れの問題と関係して Higgs ポテンシャル

$$U(\phi) = u_0 \left(\phi^\dagger \phi - \lambda^2\right)^2 \tag{5.35}$$

という良くわからないポテンシャルを導入している．ここで，u_0 と λ は任意の定数である．これはスカラー場間に働く相互作用なのだが，これがどこから来たのか全くわからない．このポテンシャルを良く見てみると結局これは自己相互作用である．自分自身で相互作用してポテンシャルを生み出しているという事は，一体物理的にどの様な現象になっているのだろうか？これは，現代の場の理論では理解できる事ではない．

(3) ゲージ不変性の破れ

Higgs 機構における最も深刻な問題点が，このゲージ不変性を勝手に破ってしまった事である．これは結局，自発的対称性の破れの理解が不十分であった事と関係している．どの系でも対称性が自発的に破れる事などあり得ないが，Higgs 機構ではただ単に変数変換をし，さらに近似をする事により手でゲージ不変性を破るような定式化を行ったのである．ゲージ場が質量を獲得してしまったら，これはゲージ不変性を破ってしまい，理論的な困難は深刻なはずだったのに，何故か人々はこの理論を受け入れて現在に至っている．

将来の展望

何故，人々が弱い相互作用の模型を考えるに際して Higgs 機構を取り入れたのであろうか？まず，弱い相互作用の理論として Fermi 理論が受け入れられていたが，これは結合定数の次元が質量の２乗分の１である４体相互作用の形をしていて，これだと２次の摂動論を行うと２次発散が出てきてしまい，これでは整合性が保たれない事になっている．一方，実験の方から弱い相互作用において力を媒介している重いボソンの存在が示唆されていた．このため，何らかの形でこの重いボソンを考慮した理論体系を考える必要に迫られていたのである．その際，単純に重いボソンを交換する相互作用を考えた場合，これはゲージ理論ではないので，繰り込みが不可能であると人々は思ったのである．実際には逆で有限質量のベクトルボソン系に対しては，物理的な観測量に発散はなく，従って繰り込みは不要である事がわかっている．この事より弱い相互作用の理論はゲージ理論から出発しなければ，全く問題のない健全な理論体系が作られるのである．

Higgs 粒子の実験結果

２０１４年の現在まで，Higgs 粒子の発見は１事象を除いて不成功である．さらに，この１事象のエネルギー領域において，別のグループによる追実験では Higgs 粒子を観測する事はできてはいない．W-ボソンの発見の時は，W-ボソンの存在を示す「複数のイベント」が見つかったと CERN は報告したのである．一方において，Higgs 粒子の探索実験では弱い相互作用の崩壊パターンは Higgs 粒子の存在を仮定しなくても理解できるかどうかで実行されるべきである．実際，全ての実験データは Higgs 粒子がなくても十分理解される事を示している．

5.5　量子色力学 (QCD) の問題点

強い相互作用を記述する理論は量子色力学 (QCD) である．これはクォークとグルオンの相互作用による SU(3) カラーの非可換ゲージ理論である．６種類のクォークが存在し，それぞれが３つのカラー自由度を持っていて，８つのカラー自由度を持つグルオンにより相互作用している系である．バリオンは３つのクォークから出来ていて，メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である．この模型は基本的には正しいと考えられる．ここでは詳しい記述はしないが，その模型の持つ良い点と問題点を議論したい．まずは Lagrangian 密度を書いて，その性質を簡単に見てゆこう．QCD の Lagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \tag{5.36}$$

と書ける．ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \tag{5.37}$$

で与えられ，グルオン場は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \tag{5.38}$$

であり，この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \tag{5.39}$$

を満たす．また，C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている．この Lagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である．

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with} \quad \chi = T^a\chi^a \tag{5.40}$$

$$A'^a_\mu = A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a \tag{5.41}$$

ただし，χ は，$\chi = \chi(t, \boldsymbol{r})$ の任意の関数であるが，無限小であるとする．

ここでこの Lagrangian 密度の詳細を議論する必要はない．大切な事は，この Lagrangian 密度は確かにゲージ変換に対して不変であるが，しかし，クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ はゲージ不変ではなく，これらのカラー電

荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないと言う事実である．これは非常に重大な事を物理的には意味している．すなわち，クォークとグルオンは観測量にはならないという事である．実際，クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが，これは保存量にはなっていない．つまり，クォークのカラー電荷は時間によってしまい，物理的な観測量にはならない事を意味している．そして，それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものであり，クォークは動力学的に閉じ込められているわけではなく，運動学的に閉じ込められているので，その閉じ込めは絶対的なものであると言える．

自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性

クォークとグルオンのカラー電荷がゲージに依ってしまう事，およびクォークとグルオンのそれぞれの自由 Lagrangian 密度がゲージ依存である事の証明はそれ程難しくはない．しかしこれは明らかに非常に重要な事である．ところが，この事を指摘している教科書はあまり知られていない．実際，印牧誠司氏の修士論文 (2007 年) がこの自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性を最初に明らかにした論文のように見える．これが本当だとしたら事態はかなり深刻である事を意味している．但し，この問題を科学史的に調べたわけではなく，この辺のところは良くわからない．

5.5.1　摂動論が定義できない！

クォークとグルオンの自由場が存在しないという事実は非常に重大であり，理論的な模型計算に大きな影響を及ぼしてしまう事になる．結論を先に言うと，この模型は全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に，解く方法が存在しない事が証明される．

QCD の摂動論

QED もそうであったように，４次元量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている．それ以外解けない事が最も大きな理由である．この摂動論の場合，その基本戦略は全ての観測量を自由場の言葉で書きたいと言う事である．例えば，QED の場合は，自由電子の状態と自由フォトンの状態の言葉で全ての観測量を表現している．ところが，QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため，QCD における観測量は何かという

事が問題になってくる．自由クォークの状態が存在しない限り，物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である．これは摂動論が使えないためどんな物理量が計算できるのかわからないと言う事を意味しており，実情は想像以上に深刻であり，全くのお手上げ状態になっている．実際，QCD における理論的な発展は，この３０年間ほとんどないのである．

漸近的自由

この QCD において，これまで摂動論による計算が行われてきたが，実は QCD の場合，自由クォークは存在しないし，自由グルオンも存在しないのでこれでは摂動論の計算は定義できなかったはずである．この自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は実験事実ではあるが，実は理論的にもそれらが観測量にはなっていない事は，良く知られている事実である．実際，自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は理論と実験の整合性もしっかり合っていて，これは疑う余地もなく QCD が恐らくは正しい理論体系であるという事を示している．

従って，しっかり考えれば，QCD の摂動論計算は，およそ直感的に不可能な事である事ぐらいは誰でもわかる事である．しかし，現実には，QCD の摂動論の計算が行われて，「漸近的自由」と言う事を「発見」してノーベル賞を受賞した人達がいるほどである．この「漸近的自由」の場合は，２重に間違えている．一つは QCD の摂動論が定義できないのに，これを実行してしまった事である．さらに，その計算の中でも「one loop」の計算は繰り込みに不要なのにそれを実行して繰り込み群方程式という仮想の方程式を発見しまったのである，このため仮想運動量の大きなクォークはほとんど自由であるというわけのわからない事を主張したのである．

5.5.2　QCD における観測量

それでは，何故 QCD が正しい理論体系であると信じているのであろうか？これにはきちんとした理由がある．最大の理由は実験的なサポートである．これは一体どういう事であろうか？クォークが観測量では無いのに，どうしてクォークの事がわかるのであろうか？これは実は簡単で，クォークには電気的な電荷があるからである．例えば，u クォークはその電荷が $\frac{2}{3}e$, d クォークは $-\frac{1}{3}e$ であるとして実験的に矛盾が無い．すなわち，クォークの電磁気的なカレントは保存量となっており，従って電磁気的なプローブで陽子を研究すれば，

確かにクォークが反応して様々な物理的な観測量を出しているのである．

陽子・中性子の磁気能率

クォーク模型によるバリオンの電磁気的な模型計算はこれまで数多く実行されている．なかでも，核子の磁気能率は実験と理論が見事に合う例として，しばしば引用されている．そして，その物理的な根拠は十分しっかりしているのである．バリオンの構造が QCD の模型により全く解かれていないのに，どうして磁気能率だけは理論的に信頼できる計算ができてしまうのかと言う疑問に対して，答えは簡単である．例えば，陽子の磁気能率は大雑把に言って

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \sum_{i=u,u,d} e_i \boldsymbol{\sigma}_i = \mu_0 e \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{u_1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}_{u_2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_d \right) \tag{5.42}$$

と書く事が出来る．ここで， $e_u = \frac{2}{3}e$ と $e_d = -\frac{1}{3}e$ は u クォークと d クォークの電荷を表している．μ_0 は典型的なスケール量を表し，例えば非相対論ならば，クォークの質量を m として $\mu_0 = \frac{1}{2m}$ となっている．いずれにせよ，この模型で陽子と中性子の磁気能率を計算すると

$$\mu_p = \mu_0, \qquad \mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0 \tag{5.43}$$

となり，この 2 つの比を取って実験と比較すると

$$\left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right)_{theory} = -1.5, \qquad \left(\frac{\mu_p}{\mu_n}\right)_{exp} = -1.46 \tag{5.44}$$

となり，恐ろしいほど良く一致している．この理由は明らかで，磁気能率が動径部分の波動関数に依っていない事が最も重要な事である．このため，クォークが陽子内部でどの様な運動をしていようが，基本的に言って，クォークのスピンの性質に支配されているので，陽子と中性子の磁気能率の比は非常に上手く記述されているのである．そして，この事は確かにクォーク模型が正しいと考えて良い事を示している．

クォークのカラー数

クォークのカラー電荷が保存量ではない事から，QCD 相互作用の取り扱いの難しさについて述べたが，それではクォークのカラー数はどの様にして検証

されたのであろうか？これは再び電磁的な相互作用を用いている．良く知られている

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{all hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} \tag{5.45}$$

の実験値からクォークのカラー数が３である事がわかる．それは，この比にはクォークのカラーの自由度が現れるからである．従って，クォークの動力学を研究する事は，非常に難しいのであるが，クォークのある種の性質は電磁気的は方法で調べる事が出来る事を示している．

$e^+e^- \to$ Jets の現象

実験的に $e^+e^- \to$ Jets の現象が知られている．これは QCD でよく理解できるのであろうか？この実験の際，ハドロン内部において $e^+e^- \to q\bar{q}$ が起こっている事は確かであろう．この過程は電磁気的なものなので，正確にわかっている．ところが，その後どうなるのかと言う事が全くわからない．クォークがハドロンから外に出て自由になると言う事が物理的に記述できないからである．それは既に議論したようにクォークのカラー電荷がゲージによるため観測量でないと言う事と関係している．

それではこの Jet の現象はどのように理解できるのであろうか？実験的にもクォークが大きな運動量を瞬間的に得た事は事実である．しかし，クォークは自由になれない．従って，ハドロンになって行くしか他に仕様がないのである．生成されたハドロンは反応過程においてエネルギーと運動量の保存則だけは充たしている必要がある．よって，これは同じ方向に基本的にはハドロンが生成された現象，すなわち Jet の現象が観測されたのであると考えられる．実験的には２ Jet が主であるが，３ Jet や４ Jet も観測されている．ハドロン内部でクォーク同士がどのような相互作用をするのかの具体的な描像が作れていない段階では，これ以上の物理的なコメントが出来ない．特に，摂動論が定義できていないからには，直感的な描像が作りきれないのである．

5.5.3 QCD 理論計算の展望

それでは，QCD の理論計算はどのようにしたら良いのであろうか？これは随分と考えて来たが，現在までの所，信頼できる計算がどの程度可能であるかについては，あまり明白な事はわからない．一つはっきりしている事は，全 Hamiltonian はゲージ不変であるという事である．従って，例えば J/ψ のような重いクォークにより構成されている中間子の場合，この全 Hamiltonian を適当なベースを選んで対角化してしまえば良いと考えられる．しかし，クォークが観測量ではないのに，その質量が重いとか軽いと言う事が物理的に意味があるのかどうか良くわからない．しかし，質量はパラメータであるから，適当な値を考える事はそれなりに意味はあるとは考えられる．それで，ともかく全 Hamiltonian の対角化の計算がどの程度大変であるかは，まだ良くわからないが，少なくとも適当なゲージ固定をして，クォークのカラー電流が保存するように選び，そのゲージ固定の範囲で計算を実行すれば，概念的な困難は避けられる気がする．ただ，単純に計算してみても，Hamiltonian を対角化するために必要なベースは非常に大きな数になってしまい，例えば，$10^8 \times 10^8$ の行列の対角化が可能になれば，ある程度信頼できる J/ψ の質量が計算できると考えられる．しかし，これらは全て今後の課題であり，計算機による数値計算を工夫する事が出来れば，それなりに意味があり，面白い結果が期待できる問題であるとは思う．

5.6　場の量子論 – 無限大と観測量

相対論的場の理論を考える時，場の量子化がどうしても必要になる．場の量子化とは何かという質問に対しては，場を演算子として扱う事であると答える事になる．また，場の量子化は何故必要なのかという疑問に対しては，電磁場の量子化は実験の要請であると答える事になる．実際，前述したように水素原子において電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ 状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移が起こった時に，光が放出される．これは観測事実であり，この事は真空から光が作られている事を示している．通常の量子力学では，粒子の生成は出来ないが，ここでは光の生成を考慮した理論を作らざるを得ないのであり，それが「場の量子化」である．この時，場自体がオペレータになる必要があり，$c-$ 数関数ではなくなっている．このため，場の量子化という言い方をしているのである．従って，場の量子化は実験を再現するために導入された理論体系である事は間違いないものであり，実際，実験をよく再現している．

ところが，一度，場の量子化が行われると様々な新しい現象が計算上現れてしまう事がわかる．その内の一つが，自己エネルギーの発散である．場の量子化により，電磁場が生成されたり消滅されたりするわけだから，電子が自分自身で光子を放出して直ぐに吸収するという過程が計算上出てきてしまい，これを計算すると Log 発散になっている事がわかるのである．朝永達が提唱した繰り込み理論が水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトの実験値を見事に再現する事が出来て，繰り込み理論の勝利となったと言う事が現代の繰り込み理論に対する基本的な評価である．

しかしながら，この Lamb シフトの問題はそう簡単ではない．それは，この Lamb シフトの計算は Bethe による非相対論的な取り扱いで行われているが，この計算には Log 発散があり Bethe は適当にそのカットオフを電子の質量に取ったのである．そしてそれがまた偶然，実験と良くあってしまったが，しかし，計算結果が Log 発散を持っている事はその取り扱いにどこか問題点がある事は明らかである．現在のところ，その発散の解決方法は分かっていない．

さらに言えば，自己エネルギー自体は観測量ではないので，その発散を気にする必要があるのかどうか疑問である．自然を理解する事を第一義的であるとするならば，自己エネルギーが発散しても特に困る事はないのである．

5.6.1 ゲージ理論信仰の崩壊

現在までの所，繰り込み理論は正しいものであると考えられている．しかしながら，最近になって，フォトンの真空偏極に関して重大な見過ごしがあった事がわかっている．このフォトンの真空偏極は元々２次発散があって，この項は手で捨てていたのである．その場合，捨てる条件として人々は「ゲージ条件」をつけたが，これが繰り込み理論の理論体系をかなり不明瞭にしていた最も重要な原因であった．この真空偏極テンサーに対する「ゲージ条件」は，実は数学的に成立していない事がわかったのである．この基本的な間違いは単純に数学的なものであり，積分において無限に発散する場合，変数変換を単純にするととんでもない間違いを犯してしまうという，極めて初歩的なミスであった．

この「ゲージ条件」とは，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対して $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$ が成り立つべきであるという要請である．これはもともとはＴ行列にあらわれている偏極ベクトル ϵ^μ に対して $\epsilon^\mu \to \epsilon^\mu + ck^\mu$ という変換に対して不変であるべきであるという要請をおく事に対応している．このことに対応して， 真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対する式が得られているのである．ところがどのように計算しても，この式を満たす事は有り得ない事が，実際に $\Pi^{\mu\nu}(k)$ を積分により求めてみればすぐにわかる事である．どうしてこのような間違いが起こったのであろうか？それは，無限大になる積分において不用意に変数変換を行うと全く間違った答えを得てしまうと言う事である．簡単な実例を挙げる前に，どうして上式が「証明」されたのかを示そう．まず，$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)$ を

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}\right)\gamma^\nu\right] \tag{5.46}$$

と書き直す事が出来る．この時，第１項において $q = p - k$ の置き換えをする．この時，確かに

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{q} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\right] - ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}\gamma^\nu\right] = 0$$

が「証明」されたと言うものである．この証明を現代の物理屋も含めてずっと長い間人々は信じて来たが，数学者はこれをみて吃驚して「物理屋はのん気で良いね」と感心していたものである．上式のどこが間違いなのか？以下に実例を示しながら解説しよう．まず，次の積分量

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x-a)^2 - x^2\right) dx \tag{5.47}$$

を計算しよう．ここで $x' = x - a$ と置き換えると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x'^2 dx' - x^2 dx \Big) = 0 \tag{5.48}$$

となり，積分値はゼロであるように見える．ところが，これをきちんと積分すると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \Big((x-a)^2 - x^2 \Big)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(a^2 - 2ax \Big)\, dx = a^2 \times \infty \tag{5.49}$$

となり，無限大である．どこで間違えたのかは，高校生がすばやくわかる問題であろう．正しく計算するには

$$Q = \lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \Big((x-a)^2 - x^2 \Big)\, dx = \lim_{\Lambda\to\infty} \left[\int_{-\Lambda-a}^{\Lambda-a} x'^2 dx' - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} x^2 dx \right] = \lim_{\Lambda\to\infty} 2a^2\Lambda$$

とするべきであった．確かに，この積分は無限大であることは明らかである．この事は無限大になる積分で変数変換を不用意にしてはいけないという当然の事が原因であったのである．

5.6.2　次元正則化

さらに悪い事に，'t Hooft 達がその論文で次元正則化という一種奇抜なアイデア (運動量空間での積分の次元を 4 から $4-\epsilon$ にした，但し，ϵ は無限小量) を提唱したのだが，これが数学の公式を間違えて使用した理論であるために，２次発散が消えていたのである．特に数学では，運動量積分 d^4p を d^Dp (但し，$D = 4-\epsilon$) とした時，積分値は ϵ がゼロの極限で元の積分値に戻る事が当然の事として必要である．しかしながら，次元正則化では ϵ をゼロに持って行く極限を取っても元に戻ってくれないのである．このように，現在ではこの次元正則化は全く役には立たない事がわかっている (加藤洋志氏，修士論文 2010 年)．しかしながらゲージ理論のみが繰り込み可能であるという「信仰」はこのフォトンの真空偏極に起因している．自己エネルギーに対する理解不足から２次発散を捨てる物理的な理由が見つからなかったために，どうしてもゲージ不変性に頼むしか他に方法が無かったのであろう．

5.6.3 朝永の推論

このフォトンの自己エネルギーを調べていたところ，朝永振一郎の著作集で彼は「フォトンの自己エネルギーはゼロである」という事を明解に主張している事がわかった．しかし彼はそれを論文にはしていなく，何処まで問題の重要性を把握していたかは分からない．しかし，彼がもっと強くこの問題を主張していたならば，ゲージ理論信仰はこれ程までには続かなかっただろうし，もっと早い段階で疑問を持った物理屋が数多くでてきた可能性はあるだろうと思われる．ゲージ理論のみが繰り込み可能でまともな理論であると言う，極めて馬鹿げた通説がこれまでの場の理論の発展を阻害してきた．実際，例えば，重力理論をゲージ理論で構築しようとすると不可能であるため，人々は一般相対論を受け入れるようになったと思われる．また，Weinberg-Salam 理論においては，最初にゲージ理論で出発したから繰り込み可能であると信じて，途中でそのゲージ不変性を破っても，その論理的飛躍を疑う事は誰もしなかった．半世紀前にゲージ理論信仰が崩壊していたら，場の理論の発展も全く違った形で実現されたであろう事は疑いなく，この事が残念で仕方がない．現在ではゲージ理論のみに奇妙な発散があり，難しい理論になっていると言う事がはっきりして来ている．それはレダンダントな変数を持つ場合，その処理が常に難しいと言う事に関係している．

この「朝永の推論」に関しては，Heisenberg が１９３４年に書いた真空偏極の論文を読む事により，朝永がどのようにして繰り込み理論を考えるに至ったかの道筋がある程度推測できるものである．Heisenberg は Dirac が空孔理論を発表した１９２８年からまだ数年しかたっていない段階で，すでに電磁場により負のエネルギー粒子が励起される過程を計算している．この論文は大変面白い論文ではあるが，しかしこれは繰り込みと矛盾しており，さらに言えば実験との整合性がない理論となっている．それは基本的には「負の粒子を詰めた真空」に対する場の理論的な理解が当時は不十分であった事に関係している．すなわち，Heisenberg 達は場の理論の真空をあたかも誘電体のようなリアルな物質状態と考えていたのである．逆に言えばこれを出発点として，朝永はフォトンの自己エネルギーはゼロである事を正確に把握していたものと考えられるのである．Heisenberg 達の計算は具体的な式変形としては間違っているわけではないと言う事実から，それではフォトンが常にその質量がゼロの粒子である事が記述できないという事実を認識するに至ったものと考えて間違いはないと思われる．これらの事が正確にわかっていれば，確かに「朝永の推論」は自然な結論である事が良くわかるものである．

5.7 繰り込み理論 (フェルミオン)

量子電磁力学 (QED) において興味ある物理的な過程を計算しようとするとどうしても摂動論を使わざるを得ない．場を量子化した後の物理系は無限自由度の多体系になっているのである．従って，QED においても厳密解を求める事は最初からあきらめざるを得ない程，難しいし複雑である．

ここでは摂動論の詳細について解説する事は出来ないし，また必要もないと思う．場の理論の摂動論は良く書かれた教科書がいくつか出版されているので，そちらを参考にして頂きたい．但し，ここで場の理論の摂動論形式に関して一つ重要な事をコメントしておきたい．それはこの場合の非摂動 Hamiltonian に関するものである．場の理論での摂動論は常に非摂動項として，自由粒子の Hamiltonian を取っている．この事は至極当然の事であるが，しかしながら，場の理論での摂動論の計算をしている時，ちょっと油断するとこの事を忘れると言うか，わからなくなってしまう事が良くあるものである．

5.7.1 フェルミオンの自己エネルギー

場を量子化して摂動論により計算をして行くわけであるが，ここである困難にぶつかってしまう．それは，フェルミオンとフォトンの自己エネルギーが無限大になってしまうのである．まずは，フェルミオンの自己エネルギーについて議論して行こう．２次の摂動論の計算を行うと，どうしても発散する Feynman グラフが出てきてしまうのである．その過程とは，電子がフォトンを放出してそのフォトンを同じ電子が吸収するという過程である．これは自然界では起こらない過程であるが，Feynman グラフを計算する限り自動的に出てきてしまうので，これを処理する事は理論計算の中では当然，必要になる．問題はこれをどのように処理するべきであるかという事である．ここで非常に重要な事は，この無限大が Log 発散の無限大であるという事である．Log 発散は数学的には無限大であるが，物理学では本当の無限大にはならない．しかし，それでもこの無限大がでて来たらそれを理論上きちんと処理する必要があると人々は考えたのである．これは理論形式の整合性を考えた場合自然な事でもあり，その処理の仕方が繰り込み理論である．繰り込みとは，英語では Renormalization であり，波動関数を再規格化する事により無限大を処理しようとする事である．

5.7.2 フェルミオンのバーテックス補正

フェルミオンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，それ自体が発散していても別に物理的に困る事はない．むしろ逆で，このフェルミオンの自己エネルギーを利用しようと言うのが繰り込み理論の本質である．それは電子に対するバーテックス補正を行うと，発散項が出てきてしまうが，しかし，このバーテックス補正は物理的な観測量になっているので，発散は何とか処理する必要がある．そして，この発散項をフェルミオンの自己エネルギーの時に使った同じ波動関数により，繰り込んでしまおうと言う事である．この事はむしろ式で見た方が簡単であろう．フェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ は発散項だけ書くと

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma_\mu \, \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m}\, \gamma^\mu \, \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2}\, \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)(-\not{p} + 4m) \quad (5.50)$$

となる．ここで Λ はカットオフ運動量である．この無限大は波動関数を再定義する事により吸収することができる．Lagrangian で書くと

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}} = \bar{\psi}\not{p}\psi - \left[\frac{e^2}{8\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\right]\bar{\psi}\not{p}\psi = \bar{\psi}_r\not{p}\psi_r \quad (5.51)$$

となり，新しい波動関数 ψ_r は

$$\psi_r = \sqrt{1 - \frac{e^2}{8\pi^2}\, \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)}\psi \quad (5.52)$$

と定義されている．ここでは質量項に関しては省略してある．次にバーテックス補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ を計算しよう．これは発散項のみ書くと

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma^\nu \, \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m}\, \gamma^\mu \, \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m}\, \gamma_\nu \, \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2}\, \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)\gamma^\mu$$

となる．この時，全相互作用 Lagangian 密度は

$$\mathcal{L}'_I = -eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \frac{e^3}{8\pi^2}\, \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)A^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -eA^\mu\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r \quad (5.53)$$

となり，発散項はフェルミオンの自己エネルギーの際に再定義した波動関数により完全に吸収されている．さらに，この手法により有限項を計算すると電子の異常磁気能率が計算でき，これは実験と大変よく合っているのである．

しかしながら，$g - 2$ のような観測量に発散があると言う事は理論形式がまだ健全ではない事を示している．フォトンの自己エネルギーの関連した観測量

はすべて有限である事が証明されているし，また有限質量のベクトルボソンによる $g-2$ の計算に発散がない事を考えてみると，結局，フォトンによる $g-2$ のバーテックス補正のみが奇妙は発散を持っている事がわかっている．これは常識的に見ればフォトンのバーテックス補正のみが何処か間違っていると考えるのが合理的である．実際，フォトンの伝播関数として誰もが Feynman の伝播関数を用いているが，この式が正しいものではない事は昔からよく知られていた事である．今後，この Feynman の伝播関数を見直して正しい伝播関数によりフォトンによる $g-2$ のバーテックス補正を計算する事が重要である．但し，この計算は相当難しいものである事がわかっている．

5.7.3 Ward の恒等式

ここで一つコメントしておきたい．繰り込み理論における繰り込み可能性の議論のところで，Ward の恒等式と言う式が出て来てこれが重要な役割を果たしているとどの教科書にも書いてある．ところが，この式をきちんと検証すると分かる事であるが，全く役に立たない方程式である．細かい事はここでは書かないが，基本的には恒等式自体は数学だから正しいが，それを物理に応用する時に間違えてしまうと言う事である．それは Ward の恒等式 を利用する際に，フェルミオンの自己エネルギーの計算で積分を実行した後，フェルミオンに対する分散関係式 $p^2 = m^2$ を使うのである．そのために，この式を p^μ で微分したものがバーテックス補正における Log 発散と形が同じになるという主張が Ward の恒等式からの結論である．しかし実はこれはフォトンの場合のバーテックス補正に対して偶然成り立っているのに過ぎない．当然の事であるが，フェルミオンの自己エネルギーの計算で $p^2 = m^2$ を使ったところからも p^μ で微分すると本当は寄与する事がわかり，Ward の恒等式自体は使い物にならないと言う事が簡単にチェックできるものである．しかし，これまで物理屋は Ward の恒等式とか Goldstone の定理とかの数学上では明らかに成り立つ方程式に対して，その物理への応用を甘く考え過ぎていたという事であろう．

5.7.4 Lamb シフト計算の困難

最近になって分かってきたことではあるが，水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトエネルギーの理論計算は実は概念的な困難を含んでいる．非相対論の計算を実行すれば，概念的な困難はないが，しかしこの場合どうしても理

論計算は Log 発散してしまうのである．現在までの所，教科書に紹介されている Lamb シフトエネルギーの理論計算は，この非相対論によるものであり，基本的に Log 発散は適当なカットオフを選べば，実験値の大きさは予言できると言うレベルのものである．

それでは相対論的な波動関数を使い，Lamb シフトエネルギーの理論計算が実行できるかという問題である．この時，実は２つの困難にぶつかる．一つは，水素原子は相対論的に扱おうとすると１体問題ではないという事である．すなわち，陽子の運動も当然考える必要が出て来てしまい，これを厳密に扱う事は現在の場の理論的枠組みの中では不可能な事である事がわかっている．非相対論では重心と相対運動が常に厳密に分離できたのであるが，相対論ではそれは簡単にはできなく，処方箋もないのである．もう一つの困難はもっと深刻である．相対論的に扱おうとするどうしても負のエネルギー状態を考える必要がある．ところが，この負のエネルギー状態は束縛状態では理論的にきちんと定義する事ができない．場の理論で言えば，水素原子での電子の状態は陽子との相互作用を通して束縛されており，その全体の系の負のエネルギー状態を考えない限り正しい取り扱いになっていないのである．ところが，現実問題としては，この２体系の負のエネルギー状態などは，どう扱ったらいいのか明確ではないのである．従って負のエネルギー状態自体をきちんと取り扱う処方箋が無い限り，Lamb シフトのエネルギーをきちんと計算する事は当然不可能な事である．これらの事より，相対論的な Lamb シフトエネルギーの理論計算は不可能であると言う事が現状である．

5.8　繰り込み理論 (フォトン)

フォトンの自己エネルギーについては，朝永の推論のところで少し議論したのであるが，ここでもう少し議論を続けて行こう．フォトンの自己エネルギーも同じように Feynman グラフを計算すると出てきてしまうのである．この場合，フォトンがフェルミオンと反フェルミオンを対生成してまたもとの同じフォトンに戻るという Feynman グラフである．これは真空偏極と呼ばれている．ところがこのフォトンの自己エネルギーの Feynman グラフは２次発散になっている．あるカットオフを考えて，その Log は大した無限大ではないが，２次発散はどの様に繰り込もうとしても不可能である．それでは，これまで人々はどうしていたのであろうか？ここで繰り込み理論で最もわかりにくい「仮定」が出てくるのである．それは「ゲージ条件」である．人々は何とかこの２次発散を捨てたいために，計算されたフォトンの自己エネルギーが波動関数に繰り込められる形，すなわちゲージ不変であるべきであるという要請をしたのである．この時最も重要な条件が「ゲージ条件」である．これは偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}$ が $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ を満たしている事に対応している．ところが，この式は成立してしないのである．すなわち，どう計算をしてみても $k_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$ である．

何故，人々がこの式を正しいと思いこんだのであろうか？唯一考えられる理由は無限大になる積分において行った変数変換で正しい処理をしなかった事である．無限積分における変数変換においては，注意しないと無限大となるべき結果がゼロである事を「証明」してしまう事は良く知られている事であるが，このように変換してはいけない所で無視して変数変換して無限積分を実行してしまった事が間違いの主たる原因であった．しかし，この様な単純なミスをどうして人々が受け入れてきたのか，今となっては理解できない事である．いずれにせよ，間違った条件を用いたために２次発散の項はゲージ条件により捨てる事が出来るというものであった．これはいかにも人工的であり無理があると直感的にはわかるものである．もともとゲージ不変性は元の Lagrangian 密度に対してすでに確認されているものであり，従ってゲージを固定して，電磁場を量子化して摂動論で計算した物理量は，ゲージ不変性を破っているわけではない．しかしこの２次発散が処理できない限り繰り込み理論の欠点であると人々は思い込んだ事であろうし，この事は理解できない事でもない．それと，２次発散を捨てる事によるフォトンの自己エネルギーの処理の仕方は，基本的にはそれ程直接的な影響を物理の観測量に与える事はなかったので，受け入れられてきたのあろうと考えられる．

5.8.1 フォトンのバーテックス補正

次節で議論するようにフォトンの自己エネルギーは繰り込みに利用される必要がない事がわかっている．フェルミオンの場合のバーテックス補正と同様に考えると，フォトンの自己エネルギーが利用されるためには，自己エネルギーのダイアグラムにもう一つのバーテックスが付いた場合を考える必要がある．これが三角形図と呼ばれるファインマン図であるが，これはフェルミオンにおけるバーテックス補正に対応していて，言ってみればフォトンのバーテックス補正である．ところがこのファインマン図において，どのようなバーテックスを取ってみても，すべてのファインマンダイアグラムに発散がない事が証明されたのである．この三角形図は物理的な観測量であるため，これが全て有限で求まったという事はフォトンの自己エネルギーを繰り込みに使う必要は全くない事を示している．これは QED の摂動形式がフォトン関係では理論形式として極めて健全である事を示している．

不思議な事にこの三角形図はアノマリーの問題と関係していて，場の理論では非常に重要な役割を担ってきたのである．最初にこの三角形図の計算を実行したのが西島先生である [1]．彼が１９６９年に書いた「Fields and Particles」の教科書ではこの三角形図の計算 ($\pi^0 \to 2\gamma$) の手法を懇切丁寧に解説してあり，読めば確実に理解できるものであった．ところがこの計算はその後完全に物理世界の主流からは無視されたのである．これは到底理解できる話ではないが，アノマリーがもてはやされたために，この事が現実に起こってしまったのである．すべての三角形図が有限で求まる事がもっと早く人々に理解されていたら，アノマリーなど存在しようがないのであり，従ってアノマリーの物理が真面目に取られる事は無かったと考えられる．従って，超弦理論も作られる事も無かったはずであり，場の理論がもっと早くに正常な発展を遂げた事は間違いない事である．

5.9　カイラルアノマリー

繰り込み理論と直接は関係はしていないのだが，１次発散に対してもその発散を抑える必要があると考えた事から「カイラルアノマリー」という不思議な概念を見つけたのが Adler である．彼は三角形ダイアグラムを計算している過程で見かけ上１次発散が出てくる事に気がつき，それに対してそれを正則化する事によりアノマリー方程式を導出してしまったのである．この導出法は２つの重大な間違いに基づいている．第一番目の間違いはゲージ条件である．これはすでにフォトンの自己エネルギーのところで解説しているように全く意味のない条件であった．第２番目の間違いは，有限量の正則化と関係している．$\gamma^\mu\gamma^5$ の頂点関数を含む三角形図には１次発散も Log 発散もなく，従ってこの S-行列は有限である．この事は Adler 達が提唱した「カイラル・アノマリー」は単純な間違いである事を示している．１次発散を正則化して求められたアノマリー方程式なのだが，その１次発散は存在しなく，よってアノマリー導出の根拠さえ失っている．さらに言えば，Noether の定理から導かれたカイラルカレントの保存則が正則化などの数学的手段で勝手に破られる事など物理的にはあってはならない事である．しかし西島先生による $\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の計算 (これは教科書 [1] でのみ発表，論文としては発表されてはいない) が一般に理解されていたら「アノマリー現象」など起こらなかった事であろう．

5.9.1　三角形ダイアグラム

三角形ダイアグラムの計算においては，その物理現象として $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊過程が良く知られている．これは実はフォトンの自己エネルギーと直接関係している．この場合，２個のフォトンが結合するところは勿論ベクタータイプ γ^μ 型である．もう一つの頂点 Γ として $\pi^0 \to 2\gamma$ の場合は擬スカラー γ^5 型であり，$Z^0 \to 2\gamma$ の場合は擬ベクトル $\gamma^\mu\gamma^5$ 型と言うように，その結合型によっていくつかの場合がある．そして，それぞれの頂点関数はそれぞれの物理的な散乱過程に対応している．

ところが，この三角形ダイアグラムの T 行列を計算するとわかる事であるが，どの三角形ダイアグラムの場合も発散は何処にもないのである．一見，見かけ上は線形発散に見えるのであるが，実際は線形発散も Log 発散もトレースとパラメータ積分の段階で厳密にゼロになるのである．これは大変重要な事を意味している．それは，これらの物理的な過程に発散がないと言う事は，フォトンの自己エネルギーは繰り込みに関係していないという当然の結果になった

のである．後でもう少し詳しく議論するが，この三角形ダイアグラムから頂点 Γ を取り除いたダイアグラムがフォトンの自己エネルギーである事がポイントである．この結果,「朝永の推論」は方向としては正しいのだが，フォトンの自己エネルギーはゼロではなくて，やはり 2 次発散がある事は確かだが，繰り込みには無関係であったという事である．

この三角形ダイアグラムの T 行列の計算法に関しては，西島先生の教科書「Fields and Particles」に１２ページに渡って詳細に解説されている [1]．これは驚くべき事であるが，この本が出版されたのが１９６９年であり，従って１９６８年には原稿が出版社に渡っている事が分かっている．ところが，Adler が三角形ダイアグラムの異常を主張したのが１９６９年なのである．きちんと計算すれば何処にも発散などなく，何故彼が「アノマリー」を主張したのかはわからない．しかし彼の計算で何故１次発散が存在すると思ったのかと言う事は論文を読めば分かる事である．彼の計算には 2 個の光子の入れ替えたダイアグラムの計算が正しく行われていないのである．２つのファインマン図を足して計算するとそれがゼロになるべきである事はある定理 (Landau-Yang の定理) からわかっている事でもある．この定理とは 2 個の光子からは 1^+ の状態は作れないと言うものである．角運動量の合成では $1^- \otimes 1^-$ では 0^+，1^+，2^+ が可能であるが，光子はボーズ粒子なので 2 光子の状態は対称である必要があるのに対して，1^+ の状態は反対称の性質を持つため作れないのである．これは回転群の知識が正確であれば間違う事はあり得ない事である．但し，0^+ の状態の場合は対称に成っているため， $\pi^0 \to 2\gamma$ の計算においては２つのファインマン図が同じになりそのまま 2 倍しても正しく，実際，トレースの計算からもそれが確かめられている．しかし，$Z^0 \to 2\gamma$ の場合には２つのファインマン図が打ち消しあってゼロになっているという事である．この $Z^0 \to 2\gamma$ の正確な計算が最近まで行われなかったことは物理学全体に大きな問題を投げかけている (阿部龍生氏, 修士論文 2013 年)．しかし，それ以上に，たかがある種のファインマンダイアグラムを計算して，それを正則化したら最も基本的な軸性ベクトルカレントの保存則が壊れたように見えたら，それは正則化の何処かがおかしいと思うべきである．

5.9.2 アノマリー方程式の消滅

すべての三角形ダイアグラムの T 行列が有限で求まったと言う事は，即ち，アノマリー方程式は物理的に意味のない方程式であったと言う事である．このアノマリー方程式自体，あまり面白い方程式ではなかったので，もともと解説

はしてなかったのであるが，結局，物理とは無関係の方程式であったと言う事である．そもそも，物理的に言って，Noether の定理から導き出されたカイラル電荷の保存則が，ある種のファインマンダイアグラムを正則化する事によって壊れるなどと言う事は，物理的にあってはならない事である．それは正則化が単に数学の手法であり物理とは直接関係しないと言う事を考えれば，至極当然の事であったわけである．正則化に関しては，例えば Pauli-Villars の正則化があるが，これに対して，朝永さんのコメントが知られており，そのコメントとは「Pauli-Villars の正則化は間違いである」と言う事であった．このコメントに関しては，Pauli-Villars の正則化が間違いと言うよりも,「この正則化は無意味であり不要である」といった方がより正確であると思われる．

5.9.3　フォトンの自己エネルギーと繰り込み理論

フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので，それが２次発散していても構わない事は前述した通りである．それではフェルミオンのバーテックス補正と同じように，フォトンの自己エネルギーも使い道があるのだろうか？これは繰り込み理論の最も重要で本質的な問題である．真空偏極が起こって，それに関連した物理的に観測可能な過程は何であろうか？この質問に対する答えは単純で，それは真空偏極が起こっている場合のフェルミオンか反フェルミオンのどちらかに何らかのバーテックスが付いた場合である．前述したように，最もよく知られているのは，$\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊過程である．この場合，バーテックスは γ_5 である事はよく知られており，この三角形ダイアグラムを計算して T-行列を求め，それから崩壊確率を計算して π^0 の寿命を求めるとこれは実験値と良く合っているのである．また，自分で計算してみればすぐわかることであるが，三角形ダイアグラムはどのバーテックスでも線形発散も Log 発散も厳密に消えてしまい，存在していない事が証明される．すなわち，自然界に起こっている物理的な過程は全て有限で求められているのである．

繰り込み不要

三角形ダイアグラムの T 行列がすべて有限で求められている事はアノマリーが物理的に無意味であった事を示しているが，これは前述した通りである．しかし，この事は繰り込み形式に対しては非常に重要な意味を持っている．真空偏極にどのバーテックスが付いても物理的な T-行列に発散が無いという事は，これらの過程では繰り込み不要であるという事を意味している．これはすな

わち，フォトンの自己エネルギーはどの繰り込みにも使われる事が無く，従ってフォトンの自己エネルギー自体は物理的には意味がない事に対応している．結局，フォトンの自己エネルギーの場合は，そのままほって置いても全く問題ないことが明白になったのである．この事は，この三角形ダイアグラムに関連している場の理論の計算手法が極めて健全である事を示している．その意味では，電子のバーテックス補正に関する場の理論の計算手法は，まだどこかに不健全さが残っているという事であろう．

5.9.4 Curie の原理 (対称性の保存)

対称性の問題を物理的にきちんと考えたのは恐らく Pierre Curie が最初であろう．彼は「圧電効果」を発見し，また「放射能の発見」でノーベル賞を受賞した事でよく知られているが，対称性に関しても重要な仕事をしている．特に，自然現象において「非対称性の物理現象はその原因がない限り結果として非対称性が現われる事はない」という Curie の原理を提唱している．

これまで議論してきた「カイラルアノマリー」の問題も Curie の原理に抵触している．原因がないのにカイラルカレントの保存則が勝手に破れる事はないとこの原理は言っているが，実際，その通りであった．

また自発的対称性の破れの問題も，もし「Curie の原理」をしっかり理解していたらあのような愚かな理論が提唱される事はなかった事であろう．現実には，カイラル対称性が自発的に破れる事などあり得ない事が今は厳密解によって証明されている．そしてこの事は Curie の原理の言っているとおり，対称性を破る相互作用 (原因) がない限り系の対称性が自然に破れる事はないと言う極めて自然な結果であった．

ここで対称性が破れている弱い相互作用について考えてみよう．これは最初の Lagrangian にパリティを破る相互作用を入れる事により現象を説明していて，確かに Curie の原理と矛盾してはいない事がわかる．その他に対称性を破る力としては CP 対称性を破る相互作用が知られている．これはしかしオペレータでその対称性を破っているわけではなく，その相互作用の結合定数を複素数にする事により CP 対称性を破っている．この現象も Curie の原理とは矛盾しないが，しかし物理的には今ひとつ理解し難い問題でもある．すなわち，対称性をオペレータでなくて，その強さをあらわす係数で破る事が直感的には良くわからない．観測量 (実験値) は実数なので何処かにジャンプがあるものと思われるが ⋯ しかし人々はわかっているのであろう．

5.10　弱い相互作用の繰り込み理論

Higgs 粒子が９５%の確率で存在しないと言う事が実験的に分かり始めている現在，弱い相互作用の繰り込みの問題を検証する事は必須条件になっている．もともと，Weinberg-Salam 理論はゲージ理論信仰に支えられて作られたものである．しかし，このゲージ理論ならば繰り込み可能と言う主張が物理的には無意味であり，つぶれてしまった事でもあり，その意味でも弱い相互作用の繰り込みの問題を考える事が避けられない問題である [2, 3].

Weinberg-Salam 理論は SU(2)⊗U(1) の非可換ゲージ理論から出発して，対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である．これは，物理的には対称性の破れの問題を誤解しており，技術的には局所ゲージ不変を勝手に破ってしまった手法が基本になっているため，およそ信頼できる模型とは言い難いものである．この事は教科書で詳しく解説しているので，ここでは省略する．しかしながら，Weinberg-Salam 模型の最終的な Hamiltonian は弱い相互作用の実験事実をよく再現するように作られている．その意味では，Higgs 粒子を除いたり，またいくつかの修正を加えれば，信頼できる模型になりうると考えられる．そうだとすると，有限質量のボソンにより媒介されている弱い相互作用の繰り込みの問題をきちんと理解する事は，非常に重要になる．

5.10.1　自発的対称性の破れ

弱い相互作用の繰り込み理論を議論する前に「自発的対称性の破れ」という言葉の誤解を解いておく必要がある．ここではカイラル対称性に対して議論するが，この自発的対称性の破れという表現はその物理現象を正しく表していなく，これはほとんど驚くべき事であるが，量子力学を理解していない事に対応している．今，ハミルトニアン $H = H_0 + H_I$ を考えた時，この H_0 は自由粒子のハミルトニアン を表すとして，H と H_0 ともにカイラル変換に対して不変であるとしよう．ここで H の固有状態である真空を $|vac\rangle_{exact}$ で表し，自由場の H_0 の固有状態である真空を $|vac\rangle_{free}$ で表そう．これは共に負のエネルギーの状態に粒子が詰まった状態を表している．この時，カイラル電荷に対する固有値は $|vac\rangle_{exact}$ に対して

$$e^{i\alpha\hat{Q}_5}|vac\rangle_{exact} = e^{\pm i\alpha}|vac\rangle_{exact} \tag{5.54}$$

となる．一方，$|vac\rangle_{free}$ に対して

$$e^{i\alpha\hat{Q}_5}|vac\rangle_{free} = |vac\rangle_{free} \tag{5.55}$$

となっている．この事は何を意味しているか，答は簡単である．自由場の真空が持つカイラル電荷はゼロであったのに対して，相互作用している真空のカイラル電荷はゼロではなくて有限であったと言う事である．これが「自発的対称性の破れ」という物理の全てである．ただ単に，自由場と比較して相互作用する場の理論の真空状態のカイラル電荷が変わっても当たり前のことで，別に新しい現象があるわけでも何でもない．

ところが南部や Weinberg 達は相互作用する場の理論自体がカイラル対称性を破ったと誤解してしまったのである．何故このような事が起こり得たのであろうか？これはある程度想像はできるが，それ以上はわからない．普通は，考えているハミルトニアンの固有状態がカイラル対称性を破ったように見えたら，自分の計算過程で重大な近似をしてしまったからか，または模型計算において何かの思考法に重大な誤りがあったのであろうと考えて，謙虚な物理屋ならば，狂うほどに注意深く検証する事になるものである．勿論，相互作用する場の理論の対称性が自然に破れたらこれはとんでもない事で，そうだとしたら自分は物理の研究をやめた方が良いという事になる．現実には，南部－Jona-Lasinio の論文においては，上述した 2 つの事が原因 (近似は Bogoliubov 変換，思考法の誤りはカットオフの理解不足) でカイラル対称性が破れたように見えただけの事である．まとめると，孤立系において対称性が自発的に破れるなどと言う事はなく，対称性が破れた状態（真空に限らず）が実現されるのは対称性を破る相互作用項を手で付け加えた場合のみに起こる事である．

しかし，問題はその後にもある．この「自発的対称性の破れ」の誤解がさらに誤解を呼んで Higgs 機構に至るのである．Higgs 機構ではさらに進んでゲージ対称性をオペレータの部分で破ってしまうが，それでも「自発的対称性の破れ」のマジックがあるから平気であり，それから標準模型が作られてしまったのである．

但し，弱い相互作用の理論はフェルミ理論から CVC 理論に至る過程で常に実験を再現するように作られており，標準模型はその正しい部分の構造を引き継いでいるために Higgs 機構を除去し，また非可換ゲージ場ではなく通常の有限質量ベクトル場を導入するなどの修正を加えれば，実験を良く再現している理論体系である事は間違い無い事である．

5.10.2 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 Z^μ の伝播関数を求める事が必要である．この場合，まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [3]．ベクトル場 Z^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} M^2 Z_\mu Z^\mu \tag{5.56}$$

で与えられる．ここで $G^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$ である．この場合，運動方程式は

$$\partial_\mu (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + M^2 Z^\nu = 0 \tag{5.57}$$

となる．自由粒子の解は

$$Z^\mu(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \epsilon^\mu(k,\lambda) \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{ikx} \right] \tag{5.58}$$

の形である事が知られているので，この式を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式をを求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \tag{5.59}$$

となる．ここで ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロ，すなわち

$$\det\{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{M}^2)\mathrm{g}^{\mu\nu} - \mathrm{k}^\mu \mathrm{k}^\nu\} = 0 \tag{5.60}$$

となる．この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \tag{5.61}$$

が唯一の解として求められる．よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{5.62}$$

が求められる．これは QED では Lorentz 条件として良く知られている式である．しかし，これがゲージ固定とは無関係に運動方程式から導かれたと言う事は QED にとっても大変なことである．それは Lorentz ゲージがゲージ固定としては意味をなさない事に対応している．

それ以上に，これまで何故この運動方程式を解くことがなされなかったのであろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが，この場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$) が求まり，それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まるのである．

5.10.3　有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定する事が大切になる．出発点となるのはS行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場のT-積が問題となる．ここで，２個のボソン場のT-積は

$$< 0|T\{Z^\mu(x_1)Z^\nu(x_2)\}|0 >= i\sum_{\lambda=1}^{3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \quad (5.63)$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)$ の形はLorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda) = -\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \quad (5.64)$$

と決定される事がわかる．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2-M^2+i\varepsilon} \quad (5.65)$$

と一義的に決定される事がわかる．この伝播関数は通常使われているものとほんの少しだけ異なっている．実際，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものである．しかし，これだと，フェルミオンの自己エネルギーとバーテックス補正には２次発散が出てしまう事は良く知られている．このため，この形では繰り込み不可能であるとこれまで考えられてきたのである．

5.10.4　ベクトルボソンによるバーテックス補正

しかしながら，新しく求められた伝播関数でバーテックス補正を計算すると驚いた事に，Log 発散がすべて消えてしまい，有限で求められるのである．実際，電子の $g-2$ に対する Z ボソンの影響を計算したところ，非常に小さくて($\delta g \sim 10^{-13}$)，この値は確かに実験と一致している事が分かったのである [3]．従って，弱い相互作用においては，繰り込みは一切不要である事が明確になった．この事より，フォトンの伝播関数がある意味で異常であり，この場合の取り扱いが最も難しいものである．さらに深刻な問題として，Feynman の伝播関数が正しくはない事である．この事はすでに１９６０年代に良く知られていた事であり，場の理論の教科書でも議論されているのだが，幸か不幸か，電

子ー電子散乱などの on-shell 散乱では Feynman の伝播関数と正しい伝播関数がともに同じ正しい散乱振幅を与える事が分かっていたのである．従って，取り扱いが簡単である Feynman の伝播関数が使われ続けられてきたのはある意味では自然な事でもあった．しかしながら，この Feynman の伝播関数はループを含む計算であるバーテックス補正に使ってはいけない事は明らかな事である．ところが，正しい伝播関数でバーテックス補正を計算しようとすると，この計算における積分が極めて難しいものとなっている．Feynman の伝播関数を用いる場合，運動量積分は常に４次元から実質１次元に帰着されたが，正しい伝播関数を用いる場合，そう簡単にはなってくれないのである．恐らくこの困難さはフォトンの質量がゼロであると言う所から来ているものと考えられるが，この点に関しては，現在もまだ良くはわかっていない．しかし，この一点を除けば，繰り込みは非常に簡単な形で理解された事になったのである．有限質量のベクトルボソンによるバーテックス補正には発散がなくて，質量ゼロのベクトルボソンであるフォトンによるバーテックス補正にのみ発散があらわれると言う事実を考えてみれば，理論形式の問題と言うよりも，フォトンの伝播関数の問題として捉えるのが最も自然である事は明らかである．いずれにしても，ゲージ理論こそが奇妙な発散を持ち難しい理論になっている事は明らかであり，ゲージ理論のみが繰り込み可能で正しい理論であると言う定説が如何に無意味な「信仰」であったかがよく分かるものである．

5.11　繰り込み理論のまとめと未解決問題

これまで見てきたようにフェルミオンとフォトンの自己エネルギー自体は確かに発散している．しかしこれらは観測量ではないので，物理的にも理論形式の観点から言っても特に問題にはならないし，放って置いてよい事である．しかしながら物理的な観測量に発散がある場合には，本来の理論形式から言っても繰り込み理論を構築する前にどこか他に問題があるかどうかの注意深い検証こそが必要なはずであった．これはDiracの主張でもあり，また念願でもあったと考えられる．フェルミオンの場合は，バーテックス補正の計算が物理的な観測量になっていて，これに発散がある場合は繰り込みが必要となる．一方，フォトンの場合は，三角形図の計算が観測量に関係しておりこれに発散があると繰り込みを考える必要がある．これまで見てきたように，観測量の計算で発散があるのは唯一フォトンによるバーテックス補正の計算のみである．まとめて見ると

繰り込み関連の計算のまとめ

	繰り込み関連のファインマン図	発散度	参考文献
1.	γ^5 バーテックスの三角形図 ($\pi^0 \to 2\gamma$)	有限	文献 [1]
2.	スカラーバーテックスの三角形図	有限	文献 [2]
3.	$\gamma^\mu\gamma^5$ バーテックスの三角形図 ($Z^0 \to 2\gamma$)	有限	文献 [3]
4.	バーテックス補正 (有限質量ベクトルボソン)	有限	文献 [3]
5.	バーテックス補正 (フォトン) [$(g-2)$ の計算]	Log 発散	文献 [6]

となっている．これが現在の状況であり，これから見ても正しい伝播関数により $(g-2)$ の計算を実行する事が重要であると考えられる．この $(g-2)$ の計算が正しい伝播関数により有限で求まれば繰り込み理論は不要となる．これが量子場の理論における繰り込み関連では唯一の未解決問題である．

5.12　場の理論のまとめ

結局，真空中における全ての物理法則は基本的には量子電磁力学と量子色力学の体系に重力と弱い相互作用をうまく含み入れたラグランジアン密度により完全に記述されており，これら全ての相互作用を考慮した理論模型は概念的な困難がない量子場の理論として完成されたものと考えてよい．一つだけまだ完全にはわかったとは言えない問題はフォトンのバーテックス補正の計算であるが，これはいずれ解決されるべきものであり，理論形式全体を揺るがすほどの問題ではない．

いずれにしても，弱い相互作用における重いベクトルボソンによるバーテックス補正が有限で求められている事は非常に重要である．これまで，ゲージ理論のみが繰り込み可能であるという常識が物理の世界を支配してきた．しかし，現実の物理は逆でゲージ理論のみが物理的な観測量に対しても奇妙な発散を持っていて，従って繰り込みという不自然な定式化を考えざるを得なかったのである．実は，発散という基本的で深刻な問題は Feynman の伝播関数を使った事に主な原因がある事は分かっている．これはゲージ自由度をうまく処理できなくて，結局，正しくは無いが誰でも簡単に計算できる Feynman の伝播関数を使う事になったのである．実際，正しい伝播関数を用いようとすると計算がべらぼーに大変になり，これは誰でも出来るわけでは無くなってしまうのである．しかし，自然界を記述するためには簡単であるかどうかは「基準」にはなり得ない．簡単な計算例として電子ー電子散乱の場合を考えると，これは Feynman の伝播関数でもまた正しい伝播関数でも，同じ結果が出る事が証明されるのである．そして，確かにその通り，いくつかの昔の教科書ではその証明を解説している．しかしながら，ループを含む計算には適用できない事は明らかであり，その事をしっかり検証しなかったために，正しい方向性を失ってしまったものと考えられる．

これまで，素粒子および宇宙論においてはネーミングのみが先行してその物理は極めて不明確であり，また貧弱であった．例えば，ブラックホールというネーミングは確かに興味をそそるものであったが，しかし，その実体は専門家自身が全く理解していない状態で研究が推移してきたのである．人々は，ブラックホールとは一般相対論の方程式の特異点であるという説明をしてきたが，それが物理的にどういう状態なのかと言う事に関しては，言葉でしか答えられなかったのである．勿論それは物理ではなく，単なる SF であった．

自発的対称性の破れと言う言葉も確かに人々の気を引く良いネーミングであったが，しかし物理的には前述したように全くの間違いであった．しかしそ

れ以上に，それを語っている人々はほとんどその物理がわかっていない状態であり，例えば自発的対称性の破れがあると Goldstone ボソンが現れると言う事を検証もしないで受け入れてきたのである．それで,「Goldstone ボソンは物理的にはどのような状態として記述できますか」と専門家に質問すると,「それは集団運動の状態だから簡単には記述できない」と人々は答えて来たのである．これは勿論，物理ではない．実際には，厳密解によれば Goldstone ボソンなど最初からあり得ないものだったのである．そして，そもそも自発的対称性の破れは，その場の理論模型における「真空」の性質のみが議論の対象となっているため，その現象がどのような形にせよ物理的な観測量に直接結びつく事はあり得ない事ではあったが，それ以上に，孤立系の場の理論においてその系の対称性が自然に破れる事など，勿論，あり得ない事である．

その他の楽しいネーミングとして，少し専門的なものではあるが「カイラルアノマリー」,「格子ゲージ」,「繰り込み群」,「漸近的自由」,「大統一理論」,「超弦理論」などが良く知られているが，それらはすべて物理的には無意味であり，いずれ消えて行くものである．

このように量子場の理論は非常にシンプルに理解できる定式化により完成されたものと考えてよい．この理論形式の解説は Bentham 出版社から「Fundamental Problems in Quantum Field Theory」の題名で e-book の教科書として出版されている．詳細はこの本を読んでいただければ良い．どの分野においても何かをシンプルに理解できた時には正しい定式化が完成したと考えてよい場合が多いものである．しかしこの場合，そのシンプルな理解に到達するまでに膨大な努力とあらゆる形の試行錯誤や不要と思われる様々な検証を経て初めて可能になるものである事は言うまでもない．

5.13　量子生物

生命の起源は恐らくは海底における火山活動と関係しているものと考えられる．高分子がさらに結合してより大きな高分子になるためには，必ず触媒に対応する物質が必要である．この触媒の役割をする事ができる物質は電離した鉄などのイオンであろう．これらの化学反応を電子の言葉で理解する事が今後の物理学の最も重要な課題になって行くものと思う．これには低エネルギーの電子の振る舞いを正確に理解する必要があるし，これこそが量子生物という学問になるものと思う．但しこれまで，物理屋は電子の波が１個の分子サイズを大幅に超えたような物理現象に関してその描像を作る事を完全に怠ってきたので，この分野で物理学を応用しようとしてもその手法を全くしらないのである．まずは基本的な低エネルギーの物理現象からしっかり理解する事が重要になるであろう．

5.13.1　量子生物

物理学の主流は今後，量子生物の研究になって行くことであろう．それは生物を電子の言葉で理解するという事である．サイエンスとしては膨大な自然現象が広がっているがそれを量子生物として理解する事は，非常に難しい事であろう．しかし，サイエンスが自然を理解しようとする学問である限り，生物自体を量子力学の言葉でどうしても理解したいものである．

例えば，生物における神経の伝達を考えると，その情報を伝えるものは，やはり電子であろうと考えられる．しかし，それが電流のように伝達するのか，あるいは何らかの「波」のように密度波として伝達するのか，まだ全くわからない．もし電子による伝達ならばどのように電位差ができるのであろうか？さらに最小単位の電位差は一体どのくらいなのであろうか？

疑問は尽きないが，しかしそれに答えるのに，まだ糸口さえつかめてはいない．それは電場にしても磁場にしても，溶液中でどうなるのかと言う問題を物理学はほとんど答えて来なかったからでもあろう．生物は水を中心にして成立していることから，生物での現象は基本的に溶液中での化学反応に対応している．

5.13.2　溶液の物理

これまでの物理学は基本的には真空中に存在している物質の振る舞いを研究する事が主力であった．量子場の理論は当然真空のみが興味の対象であったし，また固体物性も結晶が存在するところは基本的には真空，あったとしても空気中ということである．そして，その物理は，かなりの精度で現象を記述できる理論体系が完成されたと考えて良い..

今後の方向として，量子生物の研究のまえに，溶液中の物理の研究は極めて大切である．生物を物理の言葉で理解しようとすると，どうしても，溶液中における化学変化の問題にぶつかるのである．この場合，化学反応の現象論は良く理解されているのだが，その化学反応を電子の言葉で物理的に理解する仕事は，まだ，全くといって良いほどわかっていない．溶液だと何故，化学反応が起こり易くなってるのだろうか？溶液中では，例えば，水分子における電子は隣の水分子とどのような相互作用をしているのだろうか？

このように見て行くと，溶液中の化学変化の前に，溶液それ自体の性質をまず理解する必要がある事がわかる．溶液とは何かと言う事である．はっきりわかっている事として，溶液の場合，これ自体は真空中では存在できないと言う事である．即ち，溶液が溶液として存在するためにはそれを支える物質（容器）と圧力の存在が必須条件であると言う事であり，これは，溶液が全体としては束縛状態になっていないと言う事を意味している．この事より，溶液の状態は固体状態と決定的に異なっている事がわかるのである．

いずれにせよ，すべてはまだ疑問だらけである．恐らくは，何か決定的に重要な事があり，それを物理の言葉で理解する事が，今後のこの分野の進展に大きな影響を与える事になると考えられる．これからしばらくは，何が決定的に重要な役割を果たしているのかを探す事であろう．

関連図書

[1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969

[2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)

[3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013

[4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009

[5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", (McGraw-Hill Book Company,1964)

[7] J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (addison-Wesley,1967)

[8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, "Global Positioning System", Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)

[9] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).

[10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), " Lunar Orbital Evolution: A Synthesis of Recent Result