力学講義レポート問題　4/21 (2003)

(提出期限：4 月 28 日 授業終了直後)

1. 関数 $f(x,y)$ に対して x と y による偏微分の定義は次式である.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (y \text{をとめて} x \text{で微分})$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (x \text{をとめて} y \text{で微分})$$

   また, x, y は共に t の関数であるとする．すなわち、 $x = x(t)$, $y = y(t)$.

   この時、全微分の公式を証明せよ.

$$\frac{df\left(x(t), y(t)\right)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする時、次の偏微分を実行せよ。
   (a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r}\right)$
   (b) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\dfrac{1}{r}\right)$

3. 関数 $f(r,\theta)$ を $f(r,\theta) = \dfrac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \dfrac{\alpha}{r}$ とする。但し r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ は独立であると考える。
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{r}}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial r}$ を求めよ。
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を求めよ。

4. 次の式を計算により示せ。但し、微分演算子は自分より右にあるものに対しては原則として常に微分をするものとする。例えば、$\left(\dfrac{d}{dx}fg = \dfrac{df}{dx}g + f\dfrac{dg}{dx}\right)$
   (a) $e^{-ax}\dfrac{d}{dx}e^{ax}y = \left(\dfrac{d}{dx} + a\right)y$

   この式を参考にして、次の式を導け。

   (b) $\left(\dfrac{d}{dx} + a\right)\left(\dfrac{d}{dx} + b\right)y = e^{-ax}\dfrac{d}{dx}e^{(a-b)x}\dfrac{d}{dx}e^{bx}y$