力学講義レポート問題　5/26 (2003)

(提出期限：6月2日 授業終了直後)

1. 1次元の力が $F(x) = -kx$ の時を考える．

   (a) 1次元の Newton 方程式 $m\ddot{x} = F(x)$ を1回積分して、
   $$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$
   を示せ．但し、E は積分定数である．

   (b) この運動の周期は
   $$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}kx^2)}}$$
   で与えられる．ここで、x_1, x_2 はルートの中がゼロであるという条件により、決定される．よって、$x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{k}}, x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ である．この時、周期 T を求めよ．

2. 極座標 (r, θ, φ) とデカルト座標 (x, y, z) の関係は
   $$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$
   である．

   (a) この時、$0 \le \varphi \le 2\pi$ であり、$0 \le \theta \le \pi$ である．この逆 $0 \le \varphi \le \pi$ 、$0 \le \theta \le 2\pi$ では極座標での微小体積 $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ はどうなるか？
   また、θ の範囲が 2π までとするとどうなるか．

   (b) $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ を極座標で表せ．

   (c) 極座標での単位ベクトルは $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ であり、デカルト座標の単位ベクトルと次の関係式で結ばれている．
   $$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_y + \cos\theta\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_y - \sin\theta\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y \end{cases}$$
   この時、$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ の時間微分が
   $$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\ \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\ \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$
   となる事を示せ．ただし、デカルト座標の単位ベクトルは時間によらない．