[レポート問題 4/21 (解答)]

1. 略

2. (a) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

同様に $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}$$

(b) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$ より

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0 /\!/$$

[注] $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ とすると上式は

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0}$$ を表している.

しかし この $\nabla^2 \frac{1}{r}$ を 半径 a の球の体積積分をすると

$$\int_{|\mathbf{r}|\le a} \left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) d^3r = \int \nabla\cdot\left(\nabla \frac{1}{r}\right) d^3r$$

$$= \int \left(\nabla \frac{1}{r}\right)_n dS = -\int \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega = -4\pi$$

(Gaussの定理)

となって有限な値となる. これは $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ の式で $r=0$ は除かれることを意味している.

3. (a) $\frac{\partial f}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{\partial f}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$ (b) $\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$

4. 略