レポート問題(4/28)[解答]

1. (a) $\underline{y = ce^{x}}$

(b) $y_s = -x-1$ が特解になっているので

$$\underline{y = ce^{x} - x - 1}$$

(c) $\left(\frac{d}{dx}+1\right)y = e^{x}$

$$e^{-x}\frac{d}{dx}(e^{x}y) = e^{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{x}y) = e^{2x} \rightarrow e^{x}y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

これより $\underline{y = \frac{1}{2}e^{x} + ce^{-x}}$

(d) $\left(\frac{d}{dx}+2\right)\left(\frac{d}{dx}+1\right)y = \frac{1}{e^{x}+1}$

$$e^{-2x}\frac{d}{dx}e^{2x}e^{-x}\frac{d}{dx}e^{x}y = \frac{1}{e^{x}+1}$$

$$\therefore e^{x}\frac{d}{dx}e^{x}y = \int\frac{e^{2x}}{e^{x}+1}dx$$

右辺 = $\int\frac{t^{2}}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = t - \ln(t+1) + c_1$

($t = e^{x}$ とおいて)

$$\therefore e^{x}\frac{d}{dx}e^{x}y = e^{x} - \ln(e^{x}+1) + c_1$$

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = 1 - e^{-x}\ln(e^x+1) + C_1 e^{-x}$$

$$\therefore\ e^x y = x - \int e^{-x}\ln(e^x+1)\,dx - C_1 e^{-x} + C_2$$

ここで $\int e^{-x}\ln(e^x+1)\,dx$

$$= \int \frac{1}{t}\ln(t+1)\frac{dt}{t} = -\frac{1}{t}\ln(t+1) + \int\frac{dt}{t(t+1)}$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(t+1) + \ln t - \ln(t+1)$$

$$= -e^{-x}\ln(e^x+1) + \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

$$\therefore\ e^x y = x - e^{-x}\ln(e^x+1) + \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) - C_1 e^{-x} + C_2$$

$$\underline{y = xe^{-x} - e^{-2x}\ln(e^x+1) + e^{-x}\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) - C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}$$

2. (a) $x = e^{\mu t}$ とすると

$$\mu^2 + \omega^2 = 0 \qquad \therefore\ \mu = \pm i\omega$$

(b) $x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$ が一般解

Euler の公式 $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$ で書き直すと

$$x = A_1'\cos\omega t + A_2'\sin\omega t$$

3. (a) $$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

(b) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

(c) $$m\ddot{x} = -m\omega^2 x$$

$$\therefore \ \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

この一般解は $x = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$

$t=0$ で $x=x_0$, $\dot{x}=0$ なので $x = x_0 \cos\omega t$