『レポート問題（5/26）解答』

1. (a) $m\ddot{x} = -kx$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -k\dot{x}x$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

(b)

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}}$$

$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\theta$ とおいて置換積分すると

$$dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\theta\, d\theta$$ より

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2. (a) θ が π をこえると 微小体積が負になってしまう意味をみとめる。

(b) $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

$\therefore \underline{(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi)^2}$

(c) $\dot{e}_r = \dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\, e_x - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\, e_x$

$+ \dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi\, e_y + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\, e_y$

$-\dot{\theta}\sin\theta\, e_z$

$= \dot{\theta}\underbrace{(\cos\theta\cos\varphi\, e_x + \cos\theta\sin\varphi\, e_y - \sin\theta\, e_z)}_{\| e_\theta}$

$+ \dot{\varphi}\sin\theta\underbrace{(-\sin\varphi\, e_x + \cos\varphi\, e_y)}_{\| e_\varphi}$

$\therefore \underline{\dot{e}_r = \dot{\theta}\, e_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\, e_y}$

$\dot{e}_\theta$, $\dot{e}_\varphi$ を同様に計算することができる。