力　学　演　習

平成 16 年度

日本大学理工学部物理学科

公式集

1. 座標系 :

(a) 極座標：

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdydz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

(注：3 重積分のときの積分記号は $\int\int\int$ でも $\int$ でもよい)

(b) 円筒座標：

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi$$

$$z = z$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdydz = \int_0^{\infty} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

2. 運動エネルギー T :

1. デカルト座標：

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

2. 極座標：

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)$$

3. 円筒座標：

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

3. 立体角： $d\Omega$:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

4. 近似式 $(1 \gg x)$： ：

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + ...$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ...$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + ...$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + ...$$

$$\ln(1+x) = x + ...$$

5. 積分公式 ：

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a\tan\theta)\cos\theta d\theta \qquad (x = a\tan\theta)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

6. δ **関数** ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$
$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]$$
$$\delta(\boldsymbol{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

7. ベクトルの公式 ：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|\cos\theta$$
$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,| = |\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|\sin\theta$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = |\,\boldsymbol{a}\,|^2|\,\boldsymbol{b}\,|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{|\,\boldsymbol{a}\,|^2 + |\,\boldsymbol{b}\,|^2 + 2\,|\,\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}\,|\cos\theta}$$

内積：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} \equiv \mathrm{div}\ \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

外積：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} \equiv \mathrm{rot}\ \boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

8. 微分演算公式 ：

1. 直交座標系　x, y, z

   (a) gradient

$$\mathrm{grad}A_0 \equiv \nabla A_0 = \frac{\partial A_0}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial A_0}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial A_0}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

   (b) Laplacian

$$\nabla^2 A_0 \equiv \Delta A_0 = \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}$$

   (c) 直交座標におけるベクトル

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$$

   (d) divergence

$$\mathrm{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   (e) rotation

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

2. 円筒座標系　r, φ, z

   (a) gradient

$$\nabla A_0 = \frac{\partial A_0}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_0}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial A_0}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

   (b) Laplacian

$$\nabla^2 A_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_0}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}$$

   (c) 円筒座標におけるベクトル

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi + A_z\mathbf{e}_z$$

$$A_r = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi, \qquad A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$$

   (d) divergence

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   (e) rotation

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

3. 極座標系　r, θ, φ

(a) gradient

$$\nabla A_0 = \frac{\partial A_0}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A_0}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_0}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

(b) Laplacian

$$\nabla^2 A_0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_0}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_0}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_0}{\partial\varphi^2}$$

(c) 極座標におけるベクトル

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$A_r = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta$$

$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta$$

$$A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$$

(d) divergence

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

(e) rotation

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

(f) 単位ベクトルの変換

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_y + \cos\theta\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_y - \sin\theta\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \sin\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\ \mathbf{e}_\theta - \sin\varphi\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y = \sin\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\ \mathbf{e}_\theta + \cos\varphi\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z = \cos\theta\ \mathbf{e}_r - \sin\theta\ \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

9. 単位ベクトルの時間微分 ：

(a) 直交座標：

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{e}}_z = 0$$

(b) 円筒座標：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_r \end{cases}$$

(c) 極座標：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\ \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\ \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

· $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ の時間微分

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\ \mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = a_r\ \mathbf{e}_r + a_\theta\ \mathbf{e}_\theta + a_\varphi\ \mathbf{e}_\varphi \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \\ \quad = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) \end{cases}$$

10. 複素数 ：

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$$

11. 三角関数 ：

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \cos y \\ \tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \sin\theta + b\cos\theta &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \end{aligned}$$

$$\left(\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin A \sin B = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right] \\ \sin A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right] \\ \cos A \sin B = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right] \\ \cos A \cos B = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \\ \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \end{cases}$$

Taylor 展開

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... \\ \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + ... \end{cases}$$

微分

$$\begin{cases} \frac{d\sin x}{dx} = \cos x \\ \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \\ \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

12. 指数関数と対数関数 :

$$e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}, \qquad e = 2.7182818$$

$$\log xy = \log x + \log y, \qquad \log x^y = y \log x, \qquad \ln x \equiv \log_e x$$

Taylor 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ...$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$$

$$\left(\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ... \right)$$

微分

$$\begin{cases} \frac{de^x}{dx} = e^x \\ \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

13. 線積分 ：

$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \equiv \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$

C：積分路（線に沿って積分する）

（実際の積分は、直線 か 円 しか簡単にはできない）

半径 a の円：$A_\theta = A_\theta(r)$ の対称性がある場合

$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = A_\theta(r) 2\pi a$

14. 面積積分 ： $\int\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \equiv \int\int_S A_n dS$

$d\boldsymbol{S}$：ベクトルの向きは面に垂直な方向

A_n ：法線方向の成分（球の場合は $\boldsymbol{e}_r$ 方向外向き）

（実際の積分は、直方体 か 球 か 円筒 しか簡単にはできない）

半径 R の球：$A_n = A_r(r)$ の対称性がある場合

$\int\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = A_r(r) 4\pi R^2$

演習問題の重要性と難易度

$(*)$: かなり重要
$(**)$: 重要
$(***)$: 極めて重要
[難] : 難問、考え方か計算が難しい
[易] : 易しい問題

No. **1**	**1**. $(**)$, **2**. [易], **3**. $(***)$, **4**. $(*)$ [難]
No. **2**	**1**. $(**)$, **3**. $(***)$, **4**. $(**)$, **5**. $(*)$
No. **3**	**1**. $(***)$, **2**. $(*)$ [難], **3**. $(**)$, **4**. $(*)$, **5**. [易], **6**. [難]
No. **4**	**1**. $(**)$, **2**. $(**)$ [難], **3**. [易], **5**. [易], **6**. $(***)$
No. **5**	**1**. $(***)$, **2**. $(**)$ [易], **3**. $(**)$, **4**. $(*)$ [難], **5**. $(*)$, **6**. [難]
No. **6**	**1**. [易], **2**. $(**)$, **3**. [難], **6**. $(**)$ [難]
No. **7**	**2**. $(***)$, **3**. $(*)$, **5**. [易], **6**. $(**)$ [難]
No. **8**	**1**. $(*)$, **2**. $(**)$ [難], **3**. $(***)$, **4**. [難], **5**. [難],
No. **9**	**1**. $(*)$, **4**. $(*)$, **5**. $(**)$, **6**. $(**)$ [難]
No. **10**	**1**. [難], **2**. $(**)$ [難], **4**. $(***)$, **5**. [難], **6**. $(**)$
No. **11**	**1**. $(***)$, **2**. [難], **3**. $(***)$, **5**. $(*)$ [難], **6**. $(**)$ [難]
No. **12**	**1**. $(**)$ [難], **3**. [易], **4**. $(*)$ [難], **6**. $(*)$ [難]
付録	**2**. $(*)$ [難], **6**. $(**)$, **7**. $(**)$, **9**. [難], **10**. [難]

力学演習　No. 1

1.　古典力学は、Newton 方程式によってすべて記述される．質点 m が１次元上で力 F を受けているときの Newton 方程式は $m\ddot{x} = F$ である．但し、$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ と略す.

(a) $F = 0$ の場合の運動を初期条件 ($t = 0$ で $\dot{x} = v,\ x = 0$) で解け.

(b) $F = -mg$ の場合を上と同じ初期条件で解け.

(c) $F = -kx$ の場合の運動を上と同じ初期条件で解け.

2.　質量 m の粒子の位置ベクトルを $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする．$\mathbf{r}$ が微分方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \qquad (\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2})$$

に従っているとき次の問いに答えよ．但し、 $\mathbf{F} = (0, 0, f)$ で f は定数.

(a) この方程式の一般解を求めよ.

(b) $f = -mg$ とすると、この方程式で一様重力中の粒子の運動を記述できる．このとき初期条件（ $t = 0$ で $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{r}} = (v\cos\theta, 0, v\sin\theta)$ ）のもとで、この方程式を解け．また $t = 0$ で $\mathbf{r} = \mathbf{0}$,　$t = T \neq 0$ で $\mathbf{r} = (p, q, r)$ となるための初速度を求めよ.

3.　x は t についての実関数である．微分方程式

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

について、次の問いに答えよ．ただし a, b は実定数である.

(a) x_1, x_2 がこの微分方程式の解であるとき $C_1x_1 + C_2x_2$ もこの微分方程式の解であることを示せ．但し、C_1, C_2 は実定数.

(b) $e^{\lambda t}$ がこの微分方程式の解であるための条件は

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

であることを示せ.

(c) $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ が２つの根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ をもつとき、２つの１次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ が得られる．重根 $\lambda_1 = \lambda_2$ のときは $x = ye^{-\frac{a}{2}t}$ とおきかえることにより、この微分方程式の１次独立な２つの解を求めよ.

(d) このことから、以下の式がこの微分方程式の解である．

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad a^2 > 4b$$

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \qquad a^2 = 4b$$

$$x = e^{px}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \qquad a^2 < 4b$$

但し、 C_1, C_2, p, q は実数である．このとき λ_1, λ_2, p, q を a, b で表せ．

4. 線形微分方程式

$$Dx = f(t)$$

の一般解 x はこの方程式の特殊解 x_0 と同次方程式

$$Dy = 0$$

の一般解 y の和 $x = x_0 + y$ で与えられることを示せ．
但し、$D = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}$
(注：特殊解の見つけ方は、直感的に $Dx = f(t)$ をみたす解を調べて見つけるしかない．)

5. 微分方程式

$$(\frac{d}{dt} - \alpha)(\frac{d}{dt} - \beta)x = A \tag{1}$$

を次のように解け． 但し、α, β, A は定数．

(a) 次式

$$(\frac{d}{dt} - \beta)x = e^{\beta t} \frac{d}{dt}(e^{-\beta t} x)$$

を示せ．

(b) この微分方程式 (1) を (a) で示した公式を使って書き換えよ．

(c) 両辺に適当な演算をほどこして、この微分方程式の一般解を求めよ．また、問 **4** の主張が正しいことをこの場合に確かめよ．

6. 夜が何故暗いか (Olbers のパラドックス) を考察する．但し、星は無限に広い宇宙に一様に分布しているものとして、その密度を n とする．

(a) 地球から $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と $\mathbf{r}' = (x+dx, y+dy, z+dz)$ の間にある星の数 $ndxdydz$ を極座標 r, θ, φ で書け．但し、x, y, z から r, θ, φ への Jacobian J は $dxdydz = Jdrd\theta d\varphi$ として、次のように書ける．

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

(b) 星の個々の明るさを L とし、これが星の明るさの平均とする．全宇宙からの星の光を積分して地球上における明るさを求めよ．これが発散することを確かめよ．

(c) 現実に夜は暗い．このパラドックスについての現在の理解は、次のようである．それは、宇宙は有界で星の数も有限であるというものである．宇宙の大きさを１００億光年、その中にある星の数を 10^{21} 個とした時、星の全部の明るさは、太陽（明るさ L ）が何光年の距離にある場合と同じであるか？

力学演習　No. 2

1.　重力の、高さによる変化を考慮にいれて、地上から初速度 v_0 で鉛直方向に打ち上げられた物体（質量 m ）の運動を調べたい.

(a) 地球の半径 R , 質量 M , 万有引力定数を G とするとき、地表から高さ x の質量 m の物体に働く重力を求めよ.

(b) 地球表面での重力加速度 g はいくらか？
(但し $R = 6.4 \times 10^6$ m, $M = 6 \times 10^{24}$ kg, $G = 6.7 \times 10^{-11}$ Nm^2/(kg)^2)

(c) 物体に対する運動方程式を求め、

$$\dot{x}^2 - \frac{2gR}{(1 + \frac{x}{R})} = C$$

を示せ.（ C は定数 ）

(d) 初期条件 $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$ より C を決めよ.

(e) 地球重力から脱出するための速度 v_e を求めよ.

(f) v_0 が脱出速度より小さいとき、最高地点の高さを求めよ.

2.　質量 M, 半径 R の星を考える.

(a) 表面から脱出するための速度が光速 c となる、半径 R_g (Black hole 半径) を求めよ.

(b) $M = M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg の時 Black hole の半径を求めよ.

(c) 我々の宇宙の半径が１００億光年、全部の星の質量（暗黒物質も含む） $M = 10^{22} M_\odot$ としたとき、我々の宇宙は Black hole になっているか？

3.　３次元 Newton 方程式　$m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(r)$　を考える.

(a)

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

を示せ．但し、$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$　,　$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz$

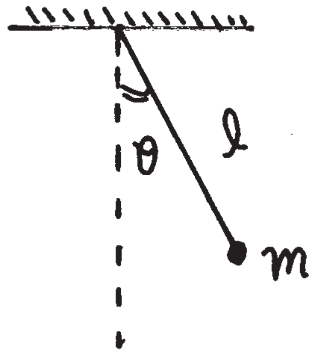
(b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ (U は $\mathbf{r}$ のみの関数) とするとき (a) の右辺を求め エネルギー 保存則を示せ.

(c) ポテンシャル U は $U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ である．ただし $\mathbf{a}$ は ポテンシャル の基準点．１次元のバネは距離 x に比例する引力 $F = -kx$ (k は定数) を受ける．この時のポテンシャルを求めよ.

(d) エネルギー 保存則よりバネの運動を求めよ.

(e) バネを３次元で考えるとき ($\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$), その ポテンシャル を求めよ.

4. 単振子の運動を考える.



(a) 単振子の運動方程式を求めよ.

(b) 微小振動の場合、運動方程式を
初期条件 ($t = 0$ で $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega\theta_0$:
但し、 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$) で解け.

(c) 角度 θ における振子の存在確率を $\rho(\theta)$ とすれば

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\pi\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

となることを示せ.

5. エネルギー 積分の方法は、力が距離の関数の時に有効であるが、力が速度によるときどうなるかを考えよう.

(a) １次元の力 $F = F_0(x) - \mu\dot{x}$ ($\mu > 0$ を考える. この時、力学的エネルギー
$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \int^x F_0(x')dx'$ は時間と共に減少することを示せ.

(b) 摩擦抵抗があるときの方程式を解きたい. (a) で $F_0(x) = -m\omega_0^2 x$ （単振動）を考える. $x = e^{\lambda t}$ とおいて λ を求めよ.

(c) 摩擦抵抗が十分大きい場合と小さい場合に分けて (b) の場合の運動方程式を解け. 但し初期条件として ($t = 0$ で $\dot{x} = v_0, x = x_0$) とする.

6. 空気中を速度 v で動く物体は $|\,v\,|$ が小さいとき速度に比例した摩擦力 $-\mu v$ を受ける.

(a) このとき質量 m の物体を静かに落下させると物体の速度は時間と共にどのように変化するか? また $t \to \infty$ での速度 v_∞ （終端速度）を求めよ.

(b) $|\,v\,|$ が大きいとき、摩擦力は $-\kappa v^2$ となる. このとき速度は時間と共にどのように変化するか? また 終端速度 v_∞ を求めよ.

力学演習　No. 3

1. 質点 m に働く力が一直線上定点からの距離を x として

$$F(x) = -kx$$

とする．但し、k は正の定数.

(a) ポテンシャル $U(x)$ を求めよ．またこれを図示せよ．但し $U(0) = 0$ とする．

(b) 全エネルギーを E とした時、運動が周期的となる条件を求めよ．

(c) 運動が周期的の場合、その周期を求めよ．

2. 質点 m に働く力が一直線上定点からの距離を x として

$$F(x) = -\lambda e^{-ax}(1 - e^{-ax})$$

とする．但し、λ, a は正の定数.

(a) ポテンシャル $U(x)$ を求めよ．またこれを図示せよ．但し $U(\infty) = 0$

(b) 運動が周期的の場合、その周期を求めよ．
Hint: $E - U(x) = 0$ の根を x_1, x_2 とし、$\alpha = e^{-ax_1}, \beta = e^{-ax_2}$ とするとき

$$y = e^{-ax} = \beta + (\alpha - \beta)\sin^2\theta$$

と変換する．また、公式

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + k\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - k^2}}$$

を使って良い.

(c) $x = 0$ 付近での微小振動の場合は、単振動になっていることを示せ．またその周期は、(b) で求めた厳密解に微小振動の近似をすると一致することを確かめよ．

3. 前問の問題を別の方法で解いてみる.

(a) エネルギー保存の式

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

において、$y = e^{ax}$ と変数変換して y の式に書き直せ.

(b) 運動が周期的の場合 $E < 0$ より $E = -|E|$ とおいて、その周期を求めよ. 但し、調和振動子 $\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(y + C_1)^2 = C_2$ の場合、その周期は、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ となる事を使ってよい. 但し、C_1, C_2 は定数.

4. 質点 m に働く１次元の力 $F(x)$ が

$$F(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^3} \quad (a, b > 0)$$

で与えられている.

(a) ポテンシャル $U(x)$ を求めこれを図示せよ. 但し、$U(\infty) = 0$.

(b) 振動する条件を求めよ.

(c) その周期を求めよ.

5. Virial 定理の証明:

ポテンシャル 内にとらわれている質点 m が周期運動をしている場合を考える.

(a) 運動 エネルギー の１周期における平均値

$$< T >= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt$$

は $x\frac{\partial U}{\partial x}$ の平均値と次式により結び付いていることを示せ.

$$< T >= \frac{1}{2} < x\frac{\partial U}{\partial x} >$$

(b) ポテンシャル が $U(x) = ax^n$ で表されるとき $< U >$ と $< T >$ の関係を求めよ.

(c) 単振動の場合, 次の 問 **5** で求めたものと一致することを確かめよ.

6. 互いに重力を及ぼしあっている質点系を考えると運動方程式は、

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\mid \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \mid^3}$$

で与えられる.

(a) 重力エネルギー を

$$\Omega = -\frac{1}{2}\sum_{j,i\neq j} \frac{Gm_i m_j}{\mid \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \mid}$$

及び運動 エネルギー を

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

とする. 系が平衡にあるとき

$$2 < T > + < \Omega >= 0$$

が成り立つことを示せ. 但し、運動は周期的とする.

Hint:

Use the following identity.

$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) = 2\dot{\mathbf{r}}_i^2 + 2\mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$. Also, note that $< \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) >$ is zero.

(b) 質点が球体称分布、同一質量で半径 R まで一様密度としたとき全体の質量を M とすれば

$$\mid \Omega \mid= \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

を示せ.

Hint:

$$\int \frac{d^3r'}{\mid \mathbf{r} - \mathbf{r}' \mid} = 2\pi \int r'^2 dr' \left[\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}}\right]$$

where the integral of [...] can be done analytically.

力学演習　No. 4

1.　次のような積分量 $I[y] = \int_0^\infty \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 \right) dx$ を最小にするような $y = y(x)$ の関数形を決定したい．但し、$y(0) = 1$,　$y(\infty) = 0$ とする．

(i) $y = e^{-\alpha x}$ の形に仮定して、α を正の変分パラメータにする．この時、$I[y]$ を最小にするような α を求めよ．

(ii) 今、 $\delta I[y] \equiv I[y + \delta y] - I[y]$ と定義する．この時、δy は関数形を少し変えることを意味し、従って $(\delta y)^2$, $(\frac{d\delta y}{dx})^2$ は十分小さくて無視できるとする．

(a) この時、

$$\delta I[y] = \int_0^\infty \left(2\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + 2y\delta y \right) dx$$

を示せ.

(b) $\delta y(0) = \delta y(\infty) = 0$ として、上式の第 1 項を部分積分することにより、

$$\delta I[y] = \int_0^\infty \left(-2\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y \right) \delta y dx$$

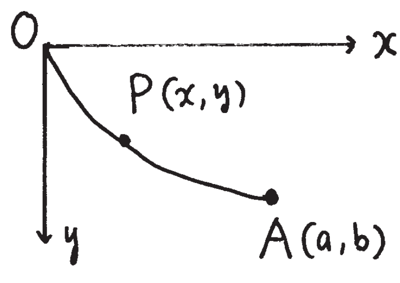
を示せ.

(c) 任意の δy に対して $\delta I[y] = 0$ となるためには積分内の括弧の中がゼロ、すなわち

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$$

である．これより $y = y(x)$ の関数形を決めよ．

2.　図の様に鉛直面 Oxy 内の点 A と原点 O を滑らかな曲線で結ぶ．原点 O を初速 0 で出発した質点がこの曲線に沿って A まで落下するとき，落下時間が極小になるように曲線の形を決めたい．



(a) 点 P における質点の速さ v はいくらか？

(b) 曲線に沿った微少な弧の長さ ds は
$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ である．
これより点 O から A まで滑り落ちる時間 T は

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

となることを示せ．

(c) 曲線の形を決めることは一般に $T = \int_0^a F(y, y')dx$ が極値を持つように $y = y(x)$ を決めることである．

$$\delta T = \int_0^a (F(y+\delta y, y'+\delta y') - F(y, y'))dx = 0$$

が任意の変分 δy に対して成立する条件を求めよ．但し $\delta y(0) = \delta y(a) = 0$ とする．

(d) $F(y, y')$ に (b) で求めたものを代入して

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

を示せ．

(e) これは 1 回積分できて $y(1 + y'^2) = const.$ となることを示せ．

(f) $x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$ が解となっていることを示せ．

3. $S = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x})dt$ という積分量を考える．S を作用という．ただし、$\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0.$

(a) S を極値にする $x = x(t)$ は $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ をみたすものであることを示せ．

(b) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$ とするとき、上の方程式は 1 次元 Newton 方程式になることを示せ．

(c) L に定数 C を加えると Newton 方程式は変わるか？

4. 前回の変分法では $S = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x})dt$ の S（作用）を極値にするように変分した．今度は Newton 方程式から出発して Lagrangian を求めたい．

(a) 単振動の場合の運動方程式を書け．

(b) 変分した結果が任意の変分 δx に対して

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} -(m\ddot{x} + kx)\delta x dt = 0$$

となっている．但し $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$. このとき

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \delta(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2)dt$$

を示せ．これより L を求めよ．

(c) 一般に $F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ のとき上と同様にして L を求めよ．

5. N 個の自由度を持った系を考える．このとき Lagrangian L は $L = L(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_N, \dot{x}_N)$ である．

(a) Lagrange 方程式は $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$ ただし $(i = 1, .., N)$ であることを示せ．

(b) $L = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$ の時，３次元の Newton 方程式がえられることを示せ．

6. ３次元の Lagrangian が $L = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r)$ で与えられている．

(a) これを極座標で表せ．

(b) 運動方程式を求めよ．

(c) 運動量を $P_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}, P_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, P_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ とするとき, どれが保存するか？

(d) 上記の運動方程式を r だけの式に書き直せ．

$$\text{Hint :} \quad (r^2\dot{\theta})\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})^2$$

力学演習　No. 5

1. 質点 m の３次元での運動を考える．運動量 $\mathbf{P}$ を $\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}}$ で定義し、角運動量 $\mathbf{L}$ を $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ で定義する．

(a) 力 $\mathbf{F}$ が保存力の場合を考える．($i.e.$ $\mathbf{F} = -\nabla U$)．このとき ポテンシャル U が中心力の場合 $U = U(|\ \mathbf{r}\ |)$、角運動量 $\mathbf{L}$ は保存量となることを示せ．

(b) $\mathbf{L}$ の方向を z 軸方向に選ぶと運動は $x - y$ 平面内で起こることを示せ．またこのとき、運動 エネルギー $T = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ を極座標 (r, φ) で表せ．

(c) 角運動量 $\mathbf{L}$ の大きさが $|\ \mathbf{L}\ | = mr^2\dot{\varphi}$ となることを示し Kepler の第２法則（面積速度 $\dot{S} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ ：一定）を示せ．(Hint: $|\ \mathbf{L}\ | = L_z$)

(d) $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ とおくとき、質点 m の運動を決める方程式は

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U - \frac{\ell^2}{2mr^2})}$$

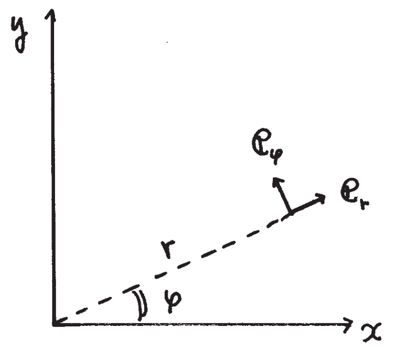
となることを示せ．但し、E は 全エネルギーである．

(e) 軌道を決める方程式は

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{m}(E - U - \frac{\ell^2}{2mr^2})}$$

となることを示せ．

2. 図の様に点 P を極座標 (r, φ) で書く．
また r, φ 方向の単位ベクトル を
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ とする．



(a) 質点 P の動径 ベクトル は $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ より
この質点の速度 $\mathbf{v}$ 及び加速度 $\mathbf{a}$ を求めよ．

(b) 力が中心力の場合 ($\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}f(r)$),
運動方程式を極座標で表せ．
ただし $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ の方向を z 軸に選ぶ．
これより、角運動量 $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ が保存することを示せ．

(c) エネルギー 積分を行い動径方向 r に対する微分方程式が前回求めたものと一致することを示せ．

3. 地球（ 質量 m ）が太陽（ 質量 M ）から受ける万有引力

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

（ただし $M \gg m$ ）に従って運動するときの軌道を求めたい.

(a) ポテンシャル $U(r)$ を求めよ．但し、$U(\infty) = 0$.

(b) 軌道を決める式は問 **1** より

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{m}(E - U - \frac{\ell^2}{2mr^2})}$$

であった．この微分方程式を解いて r, φ の関係を求めよ.

$$Hint : \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\cos^{-1}(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{q}})$$

with $q = b^2 - 4ac$.

(c) 一般に $\dfrac{1}{r} = C(1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0))$ の時

$\epsilon > 1$:双曲線 (hyperbola),　$\epsilon = 1$: 放物線 (parabola),

$\epsilon < 1$: 楕円 (ellipse),　$\epsilon = 0$: 円 (circle) である．Kepler の第 1 法則（地球は太陽をその一つの焦点にもつ楕円である）はどの様に示されるか？

4. 質点に働く力が $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ のとき，その軌道を求めたい.

(a) ポテンシャル $U(r)$ を求めよ.

(b) 軌道を決める方程式を $u = \dfrac{1}{r^2}$ と置き換えて解け.

(c) 運動が楕円になっていることを示せ.

5. Kepler の第 3 法則（太陽系の惑星の公転周期の 2 乗を楕円長半径の 3 乗で割った値は一定）を示したい.

(a) 軌道を

$$r = \frac{A}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

と書くとき，楕円の面積を求めよ.

(b) 面積速度 $\dot{S}$ を A で表せ.

(c) 軌道の面積はその周期を T として $S = \int_0^T \dot{S} dt$ で与えられる．これより Kepler の第 3 法則を示せ.

6. 力が $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ のとき，上と同様にしてその周期を求めよ.

Hint: The trajectory of the ellipse can be written as

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In this case, one can use the fact that the square of the ellipse S is $S = \pi ab$.

力学演習　No. 6

1. 質点に働くポテンシャル が Morse ポテンシャル で与えられるとする.

$$U(r) = \frac{\lambda}{a}(-e^{-ar} + \frac{1}{2}e^{-2ar})$$

(a) この ポテンシャル を $r = 0$ の付近で展開して r の２次まで求めよ.

(b) 微小振動の場合，運動が No.5 の問 **6** と同じになることを示し、その周期を求めよ..

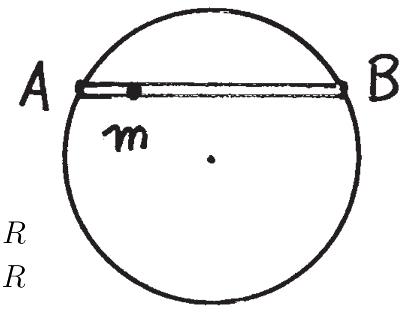
2. 質量が連続分布している時の重力場 ϕ を求めたい.

（注：重力ポテンシャルと $U(\mathbf{r}) = m\phi(\mathbf{r})$ で結び付いている.）

一様な密度 ρ を持つ質量 M, 半径 R の球の作る重力場は

$$\phi(\mathbf{r}) = -G\int \frac{\rho d^3 r'}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}$$

で与えられる.



(a) ρ を M, R で表せ.

(b)

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{R}(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}) & r \leq R \\ -\frac{GM}{r} & r > R \end{cases}$$

を示せ.

(c) 図のように地球を貫いて滑らかな直線のトンネルを作る.
このトンネルにいれた質量 m の物体に働く力を求めよ.

(d) この物体の運動を求め A から B に到達する時間を求めよ.
$(R = 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}, M = 6 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}, G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})$.

3. 逆２乗力（万有引力やクーロン力）に対しては、”球対称の密度分布をもつ物体がその外に作る力は、全質量（全電荷）が中心に集まったと仮想した時の力の場に等しい ”という定理が成り立つ.

(a) このことを示せ.

(b) 力が $\frac{1}{r^2}$ に比例しないときには、物体がその外に作る力の場はどうなるかを調べたい．但し、万有引力の場は

$$\phi(\mathbf{r}) = -G\int_{球}\frac{\rho(R)dV}{s}$$

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$$

で与えられる．一般の場合、この代わりに

$$\phi(\mathbf{r}) = -G\int_{球}\rho(R)g(s)dV$$

とする．但し、 $dV = R^2 dR\sin\theta d\theta d\varphi$.

とくに、 $g(s) = \dfrac{C}{s^{1+\alpha}}$ （C, α は定数）のときはどうなるか？ r が十分大きいものとして計算せよ．

Hint: Use the following identity.

$$sds = rR\sin\theta d\theta$$

Then, define $\tilde{G}(s) = \int_0^s s'g(s')ds'$. In this case, a part of the integrand can be expressed as $(\tilde{G}(r+R) - \tilde{G}(r-R))$. Further make use of the Taylor expansion for $(\tilde{G}(r+R) - \tilde{G}(r-R))$ since $r \gg R$.

4. 星の簡単化したモデルとして球形の気体を考える．また密度は一様とし, 各点で理想気体の状態方程式 $P(r) = \dfrac{\rho_0}{\mu}kT(r)$ が成立するものとする．

ただし，ρ_0 ; 密度，k; 気体定数，μ; 分子量．

(a) 圧力と重力の釣合から

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho_0}{R^3}r$$

を示せ．

(b) これより太陽の中心温度を求めよ．ただし表面温度 $\sim 6000K$.

$\mu = 1$ g/mol, $k = 8.3\times10^7$ erg/mol/K, $M = 2\times10^{33}$ g, $R = 7\times10^8$ m.

5. 太陽風（水素）の地球軌道での平均密度を 10 個 /cm^3, 速度を 500 km/sec とする．

５０億年の間この割合で放出したら太陽質量は何%減少するか．

6. No.5 問１で Coulomb ポテンシャル $\dfrac{\alpha}{r}$ による質量 m の粒子の軌道の式は

$$d\varphi = \frac{\frac{\ell}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}}$$

で与えられた．今この粒子の Coulomb 場による散乱を考える．

(a) 十分遠方での粒子の速度を v とし，衝突パラメータを図のように b とする．このとき エネルギー E 及び 角運動量 ℓ を m, b, v で表せ．

(b) 図の φ_0 は

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\ell}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)}}$$

で与えられる．但し r_{min} は 根の中が正という条件で求められる．この積分を実行して

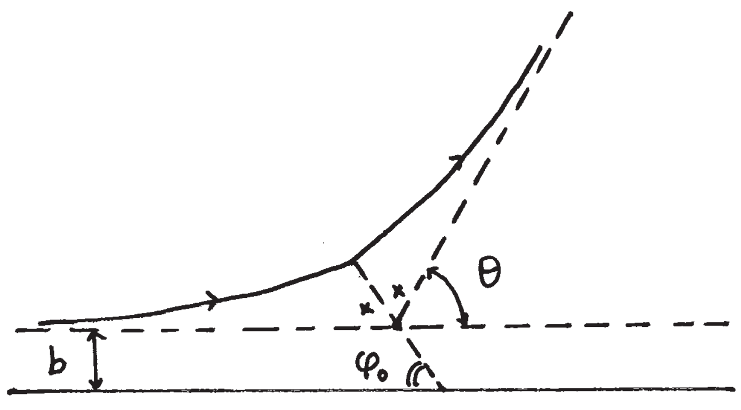
$$\varphi_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{\alpha}{mv^2b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv^2b}\right)^2}}\right)$$

を示せ．

(c) 散乱角を図のように θ とするときこの粒子の微分散乱断面積は $d\sigma = 2\pi b \left|\dfrac{db}{d\theta}\right| d\theta$ で与えられる．これより Rutherford の公式

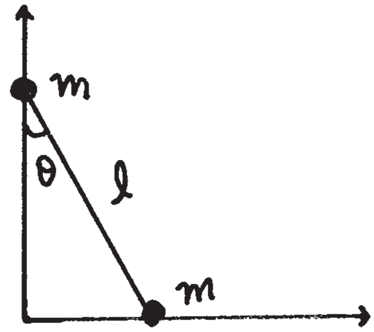
$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} d\Omega$$

を示せ．　ただし $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$.



力学演習　No. 7

1.　図のように棒の長さ ℓ の棒の両端に質量 m の質点がついている．棒の重さは無視し、重力加速度を g とする．



(a) Lagrangian をもとめよ.

(b) 運動方程式を求めよ.

(c) この方程式の解を第一種楕円積分

$$F(k,\theta)=\int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta'}}$$

を使ってあらわせ.

2.　２個の粒子が互いに相互作用している系の Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2-U(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})$$

である.

(a) $\mathbf{R}=\dfrac{m_1\mathbf{r_1}+m_2\mathbf{r_2}}{m_1+m_2}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}$ として重心座標 $\mathbf{R}$ と相対座標 $\mathbf{r}$ の運動に L を分離せよ.

(b) 全運動量 $\mathbf{P}=m_1\dot{\mathbf{r}}_1+m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ は保存することを示せ.

(c) 全角運動量 $\mathbf{L}=\mathbf{r_1}\times\mathbf{p_1}+\mathbf{r_2}\times\mathbf{p_2}$ (ここで $\mathbf{p_1}=m_1\dot{\mathbf{r}}_1,\ \ \mathbf{p_2}=m_2\dot{\mathbf{r}}_2$) は重心と相対の角運動量の和になっていることを示せ．ただし，相対運動量は $\mathbf{q}=\mu\dot{\mathbf{r}}$ である．ここで μ は換算質量 $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ である.

(d) $\mathbf{L}$ が保存されるのは $U(\mathbf{r})$ がどのようなときか？

3.　２重振り子の問題

(a) ２重振子（質量 m_1, 長さ ℓ_1 と質量 m_2, 長さ ℓ_2 ）の Lagrangian を書け.

(b) 運動方程式を求めよ.

(c) 微小振動の場合の解を $m_1=m_2=m,\ell_1=\ell_2=\ell$ の場合に求めよ.

4. 2体系の Lagrangian

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2 + \frac{M}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{y}_i^2 - V(\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2)$$

は次の Galilei 変換について不変であることを示せ.

(a) 平行移動

$$x'_i = x_i + a_i, \qquad y'_i = y_i + a_i$$

(b) 回転

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} U_{ij}x_j, \qquad y'_i = \sum_{j=1}^{3} U_{ij}y_j$$

但し、$\sum_{j=1}^{3} U_{ji}U_{jk} = \delta_{ik}$ であり、U_{ij} は定数

(c) 慣性系のとりかえ

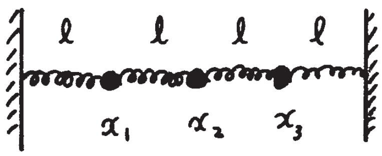
$$x'_i = v_i t + x_i, \qquad y'_i = v_i t + y_i \qquad\qquad (v_i\text{は定数})$$

5. Lagrangian for N particles interacting each other can be written as

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{i>j}^{N} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

Prove that the total momentum $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i$ is conserved.

6. 図のように3個の質点（質量 m ）をバネ定数 k の軽いバネで結び付けたものを滑らかな水平面上に置いた．バネの両端は固定してあり、それぞれのバネの自然な長さは ℓ である．

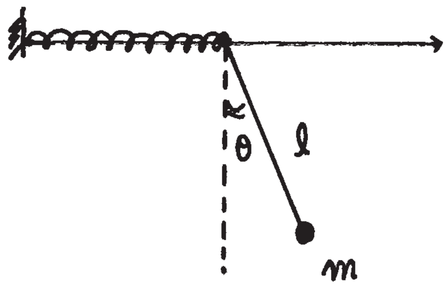


(a) Lagrangian を求めよ．また、運動方程式を求め、それを解け.

(b) 基準振動の座標 Q_1, Q_2, Q_3 を求め、
これにより Lagrangian を書き、それが対角的になっていることを確かめよ.

力学演習　No. 8

1. 単振子（長さ ℓ, 質量 m ）を吊す点が軽いバネによって水平に左右に動きうる．バネ定数を k とする．



(a) Lagrangian を求め微小振動の時，運動方程式を求めよ．

(b) 周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}\left(1+\dfrac{mg}{\ell k}\right)}$ となることを示せ．

2. Lagrangian が $L = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 + xF(t)$ で与えられる系を考える．

(a) 運動方程式を求めよ．

(b) $F(t) = 0$ の場合の一般解 x_0 を求めよ．

(c) $F(t) = a\cos\gamma t$ の時 (a) で求めた方程式の特殊解 x_1 を $x_1 = b\cos\gamma t$ の形に求めよ．

(d) (a) で求めた方程式の解は (b) の解と (c) の解の和で与えられる．$\gamma \to \omega$ の時，解はどうなっているか？(共鳴現象）また $\gamma \to \omega$ の時，発散をふせぐために有限化せよ．この時，振幅が時間と共に線形に増大することを確かめよ．

(e) $\gamma = \omega + \epsilon$ として $\epsilon \ll \omega$ の時，振幅は $x = C\cos(\omega t + \delta)$ の形に求まり，このとき C は振動する（うなりという）ことを示せ．

3. Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2) + axy$$

で与えられる系を考える．

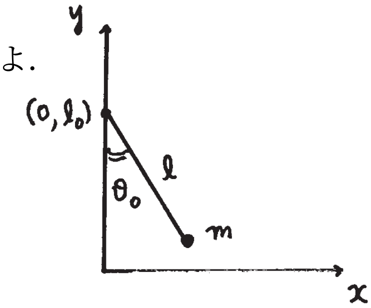
(a) 運動方程式を求めよ．

(b) $x = Ae^{i\omega t}, y = Be^{i\omega t}$ の形に解を求めよ．

(c) $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v), y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$ とおいて Lagrangian を書き直し，u, v に対する運動方程式を求め，それを解け．また (b) で求めた解との関係を議論せよ．

(d) $\dfrac{a}{m} \ll \omega_0^2$ の時，x と y の変動はうなりになることを示せ．

4. 図に示すように糸の先に質量 m の物体をつるして振子をつくり振動させる．振子の糸の長さを $\ell = \ell_0(1+\epsilon\cos\omega t)$ とする．



(a) この物体の Lagrangian を書き、運動方程式を求めよ．

(b) 振れの角 θ が小さいとき、物体の x 座標は

$$\ddot{x} = \frac{-g+\ddot{\ell}}{\ell}x$$

に従うことを示せ．但し、g は重力加速度．

(c) $\epsilon \ll 1$ の時、ϵ の１次までとると

$$\ddot{x} = \{-\omega_0^2 + \epsilon(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t\}x$$

と書ける．但し、ω_0 は ℓ が変化しないときの振子の振動数 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell_0}}$ である．この方程式を初期条件 $x(0)=A,\ \dot{x}(0)=0$ の下で解く．

$$x(t) = A(\cos\omega_0 t + \epsilon\xi(t))$$

と書いて、ϵ の１次までの近似で $\xi(t)$ を求めよ．

(d) (c) で求めた解で $\omega \to 2\omega_0$ とすると、振幅が時間に比例して増大していくことを示せ．

5. 前問 (c) の方程式で $\omega = 2\omega_0$ のときの解の振舞いをもう少し詳しく調べたい．

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(1+3\epsilon\cos 2\omega_0 t)x$$

を定数変化法により $x(t) = a(t)\cos\omega_0 t + b(t)\sin\omega_0 t$ の形に求める．但し、$a(t),\ b(t)$ は $\cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t$ にくらべてゆっくり変化する関数であるとし、２階以上の微分を無視する．

(a) a, b は次の方程式を満たすことを示せ．

$$\dot{a}\sin\omega_0 t - \dot{b}\cos\omega_0 t = \frac{3}{4}\epsilon\omega_0[a(\cos\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) + b(-\sin\omega_0 t + \sin 3\omega_0 t)]$$

(b) t の関数 f の１周期 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ についての平均を $< f(t) > \equiv \dfrac{\omega_0}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f(t)dt$ と書くとき

$$< \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t > = 0$$

$$< \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t > = < \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t > = \frac{\delta_{mn}}{2}$$

を示せ．但し、 $n, m = 1, 2, ...$

(c) この平均操作によって
$\dot{a} = -\frac{3}{4}\epsilon\omega_0 b, \quad \dot{b} = -\frac{3}{4}\epsilon\omega_0 a$
を示せ．但し、 a, b はゆっくり変化するため
$< a(t)f(t) >= a(t) < f(t) >$ などを仮定してよい.

(d) (c) で求めた方程式の解を求め、その性質が強制振動における共鳴とどう違っているか述べよ.

6. 一般化座標が運動エネルギー T の中でも位置エネルギー V の中でも分離して現れ T と V が

$$T = f(q)\dot{q}^2$$

$$V = V(q)$$

の形に書けるとき、Lagrange 方程式の解は求積形に帰着できることを示せ.

力学演習　No. 9

1. N 個の自由度を持った Lagrangian が $L = L(q_1 \cdots q_N, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_N)$ （略して $L(q_i, \dot{q}_i)$ と書く）で与えられる時，広義の 運動量 p_i を $p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ で定義する．

Hamiltonian $H(p_i, q_i)$ を $H(p_i, q_i) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L$ で定義し，変数を $\dot{q}_i$ から p_i に変える．この時

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

を示せ．(Note: These equations are called ”Hamilton equations”.)

2. 静止質量 m の相対論的粒子の作用 S

$$S = -mc \int dt \sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}$$

は次の Lorentz 変換に対して不変であることを示せ．但し、 c は光速である．

ここで、$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ に対応している．

(a) 回転

$$t' = t, \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{3} U_{ij} x_j$$

但し、 U は直交行列である．

(b) 慣性系のとりかえ

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2 \qquad x'_3 = \gamma(x_3 - vt), \qquad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x_3)$$

但し, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

3. 静止質量 m の相対論的粒子の Lagrangian は

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2}$$

である．

(a) Lagrange 方程式を導いて一般解を求めよ．

(b) x_i の正準共役量（広義の 運動量 p_i ）を求め、Hamiltonian を求めよ．

(c) Hamilton 方程式を導き、(a) で求めた Lagrange 方程式と同一のものであることを示せ．

4. Einstein の相対性理論によれば、静止質量 m の粒子の エネルギー E と運動量 p は $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ とむすびついている．

(a) p と同じ方向に速さ v で動いている系でみると、この粒子の エネルギー E' と運動量 p' は

$$p' = \gamma\left(p - \beta\frac{E}{c}\right)$$
$$E' = \gamma\left(E - \beta pc\right)$$

となる．ただし $\beta = \dfrac{v}{c}, \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ である． この時 $E'^2 - (p'c)^2 = m^2c^4$ を示せ．

(b) 星が地球に対して v で遠ざかっているとき、星の光の波長 λ は Doppler 効果 によりどれだけずれるか？

(Hint: The momentum p of light can be written as $p = \dfrac{h}{\lambda}$ where h is a constant. Note that the mass m of light is zero.)

5. 電荷 (Charge) e を持った質量 m の粒子が電場 (Electromagnetic field) と相互作用する時，Hamiltonian H は (Note: we put the light velocity c equal to unity)

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi$$

と与えられる．但し，$\mathbf{A}$ は ベクトルポテンシャルで磁場 (Magnetic field) $\mathbf{B}$ と $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で結び付き，ϕ はスカラーポテンシャルで電場 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ のように結び付く．

(a) Hamilton 方程式より

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

を示せ． Hint: $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ を使う．

(b) Lagrangian が $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$ と表せられる時、 Lagrange 方程式から運動方程式をもとめ, (a) と一致することを示せ．

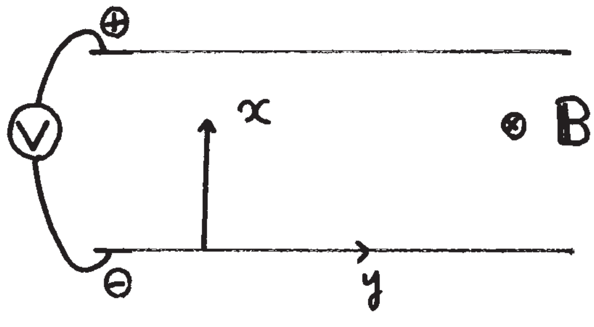
6. 平板蓄電器が作りだす x 軸に平行な一様な電場を $\mathbf{E} = (-E, 0, 0)$ とする．電極面に平行な磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を加える時，陰極板からとびだした電子 (電荷, $-e$) の軌道を求めたい．

(a) 上記の磁場 $\mathbf{B}$ を与える ベクトル ポテンシャル $\mathbf{A}$ を求めよ．

(b) 上記の電場 $\mathbf{E}$ を与える スカラー ポテンシャル ϕ を求めよ．

(c) この電子の Lagrangian をもとめ，運動方程式を書け．

(d) これを $t = 0$ で $x = y = 0$ $\dot{x} = v_0$，$\dot{y} = v_0$ の初期条件で解け．



力学演習　No. 10

1.　Lagrangian が $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - e\phi(\mathbf{r},t)$ であるとき，ゲージ変換

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \nabla\chi(\mathbf{r},t), \quad \phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\chi(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

は運動方程式を不変に保つことを示せ．ここで $\chi(\mathbf{r},t)$ は $\mathbf{r}$ と t の任意の関数である．

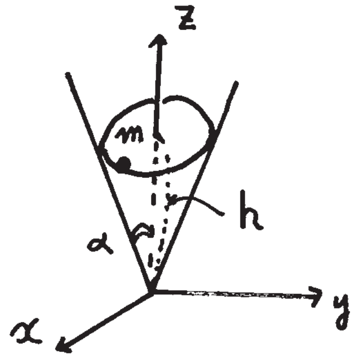
2.　原子内の電子（電荷, $-e$）は中心力 $\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$ で束縛されていると仮定する．電子の質量を m とする．

(a) この系に外部から一様な磁場 $\mathbf{B} = (0,0,B)$ を加えた時，その Lagrangian を書け.

(b) 運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

を求め、これを解け.



3.　軸が鉛直で頂点が下向きの滑らかな円錐面に束縛されている質点（質量 m ）の運動を考える．

(a) 円柱座標 (r,φ,z) を用いてこの質点の Lagrangian を書け.

(b) r,z が関係づけられることにより、z,φ に対する運動方程式を求めよ．この時、角運動量の z 成分が一定（これを M_z と書く）であることを示せ.

(c) 質点の全エネルギーを E とした時、次式を示せ.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\sec^2\alpha + \frac{M_z^2}{m^2z^2\tan^2\alpha}\right) + mgz$$

(d) この質点が定常運動（水平な円運動）をする条件を調べたい．初期条件は $z=h$ で水平速度 v である．この時運動方程式は

$$\dot{z}^2 = \frac{1}{z^2}(h-z)\left(2gz^2 - v^2z - v^2h\right)\cos^2\alpha$$

となることを示せ.

(e) 定常運動をするには、$v^2 = gh$ であればよいことを示せ.

(f) $z=h$ 付近での微小振動の周期が $T=2\pi\sqrt{\dfrac{h}{3g\cos^2\alpha}}$ となることを示せ.

4. 静止系を $S'(x',y',z')$, 回転系を $S(x,y,z)$ とする.
この時、系 S は z 軸の回りの回転とする.

(a) 静止系 S' における速度 $\dot{x}',\dot{y}',\dot{z}'$ を
回転系 S に射影したものを $\dot{x'}_r,\dot{y'}_r,\dot{z'}_r$ とするとき、

$$\dot{x'}_r=\dot{x}'\cos\varphi+\dot{y}'\sin\varphi$$

$$\dot{y'}_r=-\dot{x}'\sin\varphi+\dot{y}'\cos\varphi$$

$$\dot{z'}_r=\dot{z}'$$

である．今系 S の回転角速度 ベクトル $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\dot{\varphi})$ の時

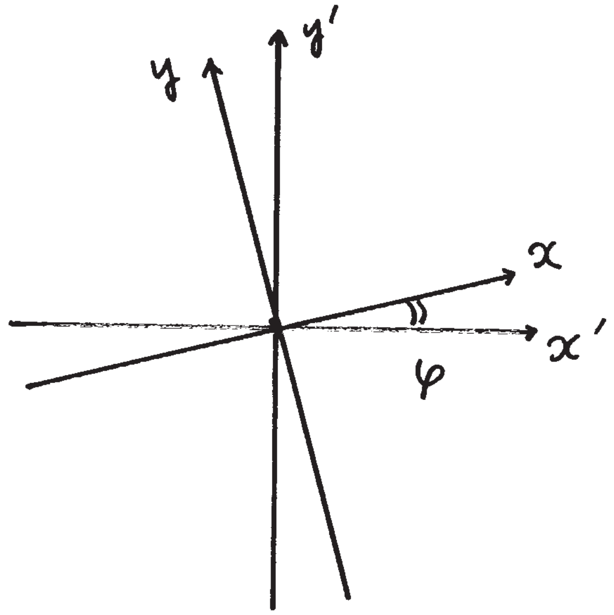
$$\dot{\mathbf{r}}'_r=\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

を示せ.

(b) ベクトル の大きさは系によらないので $|\ \dot{\mathbf{r}}'_r\ |=|\ \dot{\mathbf{r}}'\ |$ である.
これより回転系 S での変数をもちいて Lagrangian を書くと

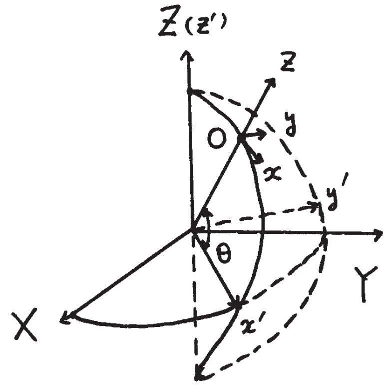
$$L=\tfrac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2-U(\mathbf{r})$$

となる．この時、運動方程式を求めよ.



5. 地球上での物体（質量 m）の運動に対する地球の自転の影響を調べたい．

但し，地球の半径 $R = 6.4 \times 10^6$ m．慣性系を (X, Y, Z) とし地球は Z 軸の回りを角速度 ω で回転している．その座標系を (x', y', z') とする．



(a) 座標系 (x', y', z') での運動方程式は

$$m\ddot{x}' = F'_x + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x'$$

$$m\ddot{y}' = F'_y - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$$

$$m\ddot{z}' = F'_z$$

となることを示せ.

(b) 地表上の点 O （緯度が θ）で $x' - z'$ 面で y' 軸に $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ だけ回転した座標系 (x, y, z) と座標系 (x', y', z') の関係式

$$x = x' \sin\theta - z' \cos\theta$$

$$y = y'$$

$$z = x' \cos\theta + z' \sin\theta - R$$

を示せ.

(c) 座標系 (x, y, z) での運動方程式が次のようになることを示せ.

$$m\ddot{x} = F_x + 2m\omega\dot{y}\sin\theta + m\omega^2 x \sin^2\theta + m\omega^2(R+z)\sin\theta\cos\theta$$

$$m\ddot{y} = F_y - 2m\omega\dot{x}\sin\theta - 2m\omega\dot{z}\cos\theta + m\omega^2 y$$

$$m\ddot{z} = F_z + 2m\omega\dot{y}\cos\theta + m\omega^2 x\sin\theta\cos\theta + m\omega^2(R+z)\cos^2\theta$$

(d) 遠心力による見かけの重力の大きさが、東京でどうかわっているか数値でチェックせよ.

6. 質量 m の質点が $x-$ 軸上を滑らかに運動できるとする．この $x-$ 軸が $z-$ 軸の回りに角速度 ω で回転した時、$x-$ 軸上に拘束されている質点の運動を求めよ．但し、初期条件として、$t = 0$ で $x = 0$、 $\dot{x} = v$ とする.

力学演習　No. 11

1. 剛体の重心の位置ベクトルを $\mathbf{R}$、 剛体と一緒にその重心の回りに回転している座標系からみた剛体の各部分の位置ベクトルを $\mathbf{r}_N$ とする時、剛体の Lagrangian は

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_N \frac{1}{2} m_N (\dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N)^2 \\
&= \sum_N \{ \frac{1}{2} m_N \dot{\mathbf{R}}^2 + m_N \dot{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N + \tfrac{1}{2} m_N (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_N)^2 \} \\
&\equiv L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)}
\end{aligned}
$$

で与えられている．但し，剛体を細かく分割してある．

(a) 第一項は何に対応しているか？(Hint:　$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}$ is a constant.)

(b) 重心を原点にとると $L^{(2)} = 0$ であることを示せ.

(c) $L^{(3)} = \sum_N \frac{1}{2} m_N (\omega^2 r_N^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_N)^2)$ を示せ.

(d) $L^{(3)}$ は連続体の極限で

$$
L^{(3)} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) (\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2) d^3 r
$$

となる．但し、$\int \rho(\mathbf{r}) d^3 r = M =$ 剛体の質量.　今, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ とする時

$$
L^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} \omega_i \omega_j
$$

と書ける事を示せ．但し、

$$
I_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) d^3 r
$$

であり慣性能率 (Moment of Inertia) という.

2. 剛体の 角運動量 $\mathbf{M}$ は各点での回転速度 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ より

$$
\mathbf{M} = \int \rho(\mathbf{r}) [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] d^3 r
$$

である.

(a)

$$
M_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij} \omega_j
$$

を示せ.

(b) 今、座標系を適当にとった時、$M_i = I_i \omega_i$ となるような系が常に存在することを示せ. (Hint: Note that $I_{ij} = I_{ji}$)

(c) I に対する固有値を I_1, I_2, I_3 とし、I_1, I_2 に対する $\boldsymbol{\omega}$ の値を $\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(2)}$ とする時、$I_1 \neq I_2$ ならば、$\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ と $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ は直交する ($\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(2)} = 0$) 事を示せ.

3. 次の主慣性能率（重心の回り）を求めよ．但し、質量は M である.

(a) 長さ ℓ の 細長い棒

(b) 半径 R の球

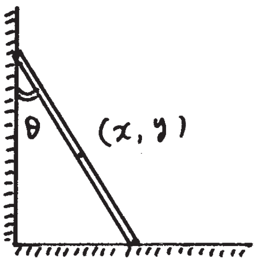
(c) 半径 R , 高さ h の円柱

(d) 辺の長さが a, b, c の直方体

(e) 半軸の長さ a, b, c の楕円体

(f) 円板（半径 a）

4. 滑らかな水平面にはじめ鉛直に立っていた
質量 m、 長さ ℓ の棒が静かに倒れ始める。



(a) この棒の重心の回りの慣性モーメントを求めよ。

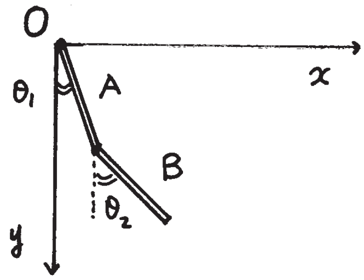
(b) 棒の重心座標を (x, y) とする時、
この棒の重心エネルギー T_{CM} を求めよ。

(c) この棒の回転エネルギー T_R を求めよ。

(d) この棒の Lagrangian を求め、運動方程式を求めよ。

(e) 棒の角度が $\theta = \frac{\pi}{6}$ になった時の角速度を求めよ。

5. 図の様にちょうつがいによって連結され、
O 点を通る鉛直面の中で自由に回転
出来る長さ ℓ の 2 本の棒からできた
2 重振子がある.（棒の質量 M）



(a) 棒 A の点 O の回りの慣性能率 I_A を求めよ.

(b) 棒 A の Lagrangian L_A を求めよ.

(c) 棒 B の 運動 エネルギー は、並進運動と重心の回りの回転運動の和である.
棒 B の Lagrangian L_B を求めよ.

(d) 微小振動の場合を論ぜよ.
（注： Lagrangian は常に 全体 で考える．今の場合 $L = L_A + L_B$.）

6. 独楽の運動を求めたい．静止座標系を (X, Y, Z) とし、運動座標系を (x_1, x_2, x_3) とする．XYZ 軸に対する x_1, x_2, x_3 軸の方向を定める量として Euler 角 (θ, φ, ψ) を図のように定義する．

(a) 角速度 $\dot\theta$ と $\dot\varphi$ の x_1, x_2, x_3 軸方向の成分を求めよ．

(b) これより角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の x_1, x_2, x_3 軸の成分は

$\omega_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi$

$\omega_2 = \dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi$

$\omega_3 = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi$

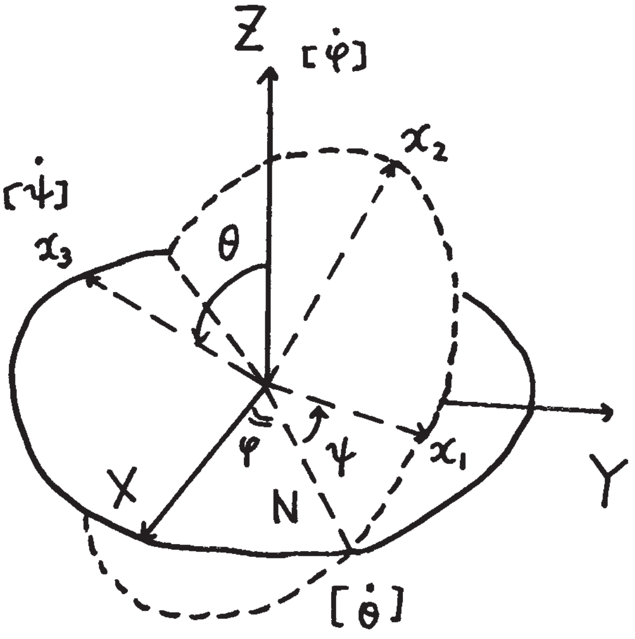
となることを示せ．

(c) 慣性能率が $I_1 = I_2 \neq I_3$ である
対称独楽の回転エネルギー E を求めよ．

(d) 外場がない場合、Lagrange 方程式により
$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}, \quad M_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi}$ が保存することを示せ．

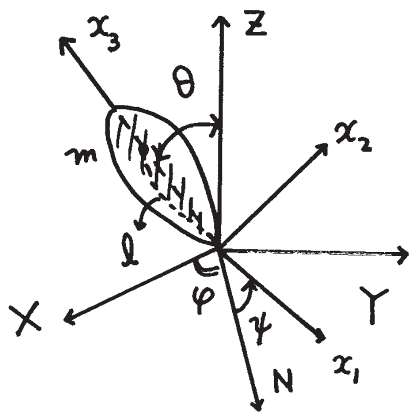
(e) Z 軸を 角運動量 $\mathbf{M}$ の方向ととる．
(i.e. $M_Z = M, \quad M_3 = M\cos\theta$)
この時運動方程式より $\dot\theta = \mathrm{const.}$ を示せ．

(f) エネルギー 保存 の式より $\theta =$ 一定を示せ．



力学演習　No. 12

1.　図のように下端が動かない対称独楽の重力のもとでの運動を求めたい.



(a) Lagrangian を求めよ．但し、独楽の質量 m、原点（不動点）から慣性中心までの距離を ℓ 重心のまわりの慣性能率は $I_1 = I_2 \neq I_3$ とする.

(b) 運動方程式を求め、No.11 の **6** と同様 M_z, M_3 が保存する事を確かめよ.

(c) φ と ψ を消去することにより

$$E = \frac{1}{2}(I_1 + m\ell^2)\dot{\theta}^2 + U(\theta) + \frac{M_3^2}{2I_3}$$

但し、

$$U(\theta) = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2(I_1 + m\ell^2)\sin^2\theta} + mg\ell\cos\theta$$

となることを示せ.

(d) 上の微分方程式を数値的に解いて、独楽の運動を論ぜよ.

2.　正準変換 (Canonical transformation) :

(a) 作用 (Action) $S = \int_{t_0}^{t} L dt'$ を t と q の関数と考える.

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q$$

を示せ．但し、$\delta q(t_0) = 0$.

(b) 次の関係式を証明せよ.

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad dS = pdq - Hdt, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

但し、$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, H: Hamiltonian.

3. $S=\int(pdq-Hdt)$ で q と p を独立変数とみなした時、

Hamilton 方程式 ($\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}$) を求めよ.

4. p,q から P,Q へ $P=P(p,q,t),\ Q=Q(p,q,t)$ と変換し、かつ新しい Hamiltonian H' で

$$\dot{Q}=\frac{\partial H'}{\partial P},\quad \dot{P}=-\frac{\partial H'}{\partial Q}$$

と書ける時、この変換を正準変換 (Canonical Transformation) という.

$$pdq-Hdt=PdQ-H'dt+dF$$

を満たす F を母関数 (Generating Function) という.

(a) これより

$$p=\frac{\partial F}{\partial q},\quad P=-\frac{\partial F}{\partial Q},\quad H'=H+\frac{\partial F}{\partial t}$$

を示せ.

(b) 新しい母関数を $\Phi=F+PQ$ とした時、

$$p=\frac{\partial \Phi}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial \Phi}{\partial P},\quad H'=H+\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

を示せ.

(c) 正準変換は位相空間 (Phase space) の体積 Γ を不変に保つ事を示せ.

Hint:

$$d\Gamma=dqdp=\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}dQdP$$

の Jacobian が 1 であることを示す. Note:

$$\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}=\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,P)}\frac{\partial(q,P)}{\partial(Q,P)}$$

(d) 次の変換が $(q,p)\longrightarrow(Q,P)$ の正準変換になっている事を示せ.

(1) $Q=\sqrt{2q}\cos p,\quad P=\sqrt{2q}\sin p$

(2) $Q=\log(\frac{1}{q}\sin p),\quad P=q\cot p$

5. Let us consider the following Hamiltonian with the momentum p and the coordinate q ,

$$H = \frac{1}{2}(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4).$$

(a) Derive an equation of motion for the q in this system.

(b) Find a canonical transformation $(p, q) \to (P, Q)$ that transforms the above Hamiltonian into a harmonic oscillator Hamiltonian $H' = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$. Prove that the solution with the new variable satisfies the equation of motion which is derived in (a).

Hint: The generating function is $\Phi = \dfrac{P}{q}$.

6. Hamilton-Jacobi の方程式 :
$\dfrac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$ において $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$ と置き換えると、この式は S に対する微分方程式となる．これを Hamilton-Jacobi の方程式という．

(a) 今、 S の完全解が $S = f(t, q, \alpha)$ と求まったとする．ここで α は任意定数．この時、α を新しい 運動量 とみなし、その正準座標を β とする．p, q から α, β への正準変換は

$$p = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

で与えられることを示せ．またこの時、 $H' = 0$ を示せ．

(b) 新しい変数に対する正準方程式を書いて、$\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ を導け．運動は $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ より決まる．

(c) 調和振動子 (Harmonic Oscillator)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

について Hamilton-Jacobi 法により、運動を求めよ．

Hint: Inserting $S = -Et + S_0(q, E)$ into the Hamilton-Jacobi'equation, one can obtain an equation for the S_0. Then, the equation

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t + const.$$

can determine the motion of the particle.

力学演習　付録の問題

1. １次元の Newton 方程式 $m\ddot{x} = F(x, t)$ を考える.

(a) Galilei 変換 $x' = x + vt,\ t' = t$ （v は定数) に対して不変か？

(b) $x' = x + gt^2$, $t' = t$ の変換に対してはどうか？

2. 真空中での Maxwell 方程式は次式で与えられる.

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(a) ベクトル ポテンシャル $\mathbf{A}$, スカラー ポテンシャル ϕ をもちいて

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

とするとき $\mathbf{A}, \phi$ が

$$(\nabla^{\mathbf{2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{A} = 0 \tag{1}$$
$$(\nabla^{\mathbf{2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi = 0 \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を満たしていれば、$\mathbf{E}, \mathbf{B}$　が Maxwell 方程式を満たしていることを示せ.

(b) 式 (1) (2) は Galilei 変換 $(x' = x, y' = y, z' = z + vt, t' = t)$ に対して不変であるか？

(c) 式 (1) (2) は、Lorentz 変換 $(x' = x, y' = y, z' = \gamma(z - vt), t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}z)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, c は光速) に対して不変であるか.

(d) Newton 方程式は、Lorentz 変換に対して、不変であるか？

3. 完全導関数

(a) Lagrangian $L(x, \dot{x})$ の時間に対する完全導関数を求めよ.

(b) Lagrange equation を使って

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L) = 0$$

を示せ.

(c) $L = T - U$ のとき, エネルギー 保存則 を示せ.

4. Atwood's machine

(a) Obtain a Lagrangian for Atwoods' machine.

(b) Obtain the equation of motion and solve it.

5. １次元で質量 m の粒子が Lagrangian

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$$

で記述される運動を行っている. V は微分可能な関数である. $x(t)$ に対する運動方程式を導き、この系の物理的性質を調べよ.

6. 単振子の問題（No. 2 問４） を Lagrangian によって解きたい.

(a) Lagrangian を求め, 運動方程式を書け.

(b) 微小振動の場合の解を求めよ.

(c) 上の問題で紐の代わりに, バネ定数 k のバネでできているとする.
このとき Lagrangian を求め運動方程式を書け.

(d) バネの運動がゆっくり変化し, 微小振動の場合この運動を論ぜよ.
（ Note: This problem cannot be solved analytically. Those who can use a computor should make a numerical computation of this problem. ）

7. 半径 R の剛体球（すなわち相互作用が $r < R$ で $U = \infty$, $r > R$ で $U = 0$ ）による粒子の散乱断面積を決定せよ.

8. Lagrangian が一般化座標の高階導関数を含む一般化された力学を考える. 例として、Lagrangian $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ とし、q と $\dot{q}$ の変分を両端でゼロとする. 変分法を用いて Euler-Lagrange equation を求め、

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

を導け. この結果を Lagrangian が

$$L = -\frac{m}{2}q\ddot{q} - \frac{1}{2}kq^2$$

で与えられる系に適用せよ．得られた方程式は、運動方程式と見なせるか.

9. 方程式 $\sigma(\mathbf{r}, t) = 0$ で表される曲面上に拘束されている粒子が、ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ から力を受けて運動を行う．この曲面が実際に時刻と共に変化すれば粒子のエネルギーは保存されないことを示せ．またエネルギーが保存されない物理的理由を述べよ.

Hint: The Lagrangian with constraints can be written with the Lagrange multiplier λ as

$$L = L_0 + \lambda\sigma(\mathbf{r}, t).$$

10. 摩擦のない滑らかな曲面上に拘束されている質点 m の運動を考える.
曲面上の座標 (q_1, q_2), $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2)$ の 2 点間の距離が

$$ds = (\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}dq_i dq_j)^{\frac{1}{2}}$$

の形に表されるとする．但し、g_{ij} は q_1, q_2 の関数であり $g_{ij} = g_{ji}$ をみたす.

(a) 今、外力が働かないとするとき Lagrangian を求め、運動方程式を書け.

(b) g_{ij} の逆行列として、

$$\sum_i g^{hi} g_{ij} = \delta_{hj}$$

をみたす g^{hi} を導入する.（注： δ_{ij} は、クロネッカーの δ 関数である.）
g^{hi} を (a) で得られた方程式に掛けて i について和を取ることにより、

$$\ddot{q}_h + \sum_{ijk} g^{hi}\Gamma_{i,jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = 0$$

が求められることを示せ． 但し、$\Gamma_{i,jk}$ は

$$\Gamma_{i,jk} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i})$$

で定義され Christoffel の記号とよばれる.

Appendix

1. 微分

(a) 微分の定義

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (*)$$

(b) 合成微分

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \qquad (*)$$

**example:

$f(u) = u^2, \qquad u(x) = e^x$

公式 (*) より

$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 2ue^x = 2e^{2x}$

一方 直接計算すると $\qquad f(x) = u^2 = e^{2x}$ より $\frac{df(u(x))}{dx} = 2e^{2x}$

(c) 偏微分

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv [\, y \text{ をとめて } x \text{ だけで微分}] \qquad (*)$$

**example:

$f(x,y) = x^n y^n \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = nx^{n-1}y^n$

(d) 全微分

$f(x(t), y(t), t)$ のとき

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (*)$$

**example:

$f(x(t), y(t), t) = x^2y^2e^{at}$

$x = \sin t, \quad y = \cos t$

公式 (*) より

$\frac{df}{dt} = 2xy^2e^{at}\cos t - 2yx^2e^{at}\sin t + ax^2y^2e^{at}$

$\qquad = \sin 2t \cos 2te^{at} + \frac{1}{4}a(\sin 2t)^2e^{at}$

一方 直接計算すると

$f(x(t), y(t), t) = \sin^2 t \cos^2 te^{at} = \frac{1}{4}(\sin 2t)^2e^{at}$

$\frac{df}{dt} = \sin 2t \cos 2te^{at} + \frac{1}{4}a(\sin 2t)^2e^{at}$

2. 合成変換

$(x, y) \to (u, v)$ namely $(u(x, y), v(x, y))$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (*)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \qquad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} \qquad (*)$$

3. Grassmann 代数

a, b に対して

$$a * b = -b * a \qquad (*)$$

とする．また結合法則と分配法則が成立するとする．

微分 du, dv 等は Grassmann 代数で扱うと便利である．

$$\begin{aligned} du * dv &= (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) * (\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy) && (1) \\ &= (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x})dx * dy \qquad (*) && (2) \\ J &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (*) && (3) \end{aligned}$$

J を Jacobian という．

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

4. 変数変換

(a) example: $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi && (4)\\
y &= r\sin\theta\sin\phi && (5)\\
z &= r\cos\theta && (6)\\
dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi && (7)\\
dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi && (8)\\
dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta && (9)\\
dr &= \sin\theta\cos\phi dx + \sin\theta\sin\phi dy + \cos\theta dz && (10)\\
rd\theta &= \cos\theta\cos\phi dx + \cos\theta\sin\phi dy - \sin\theta dz && (11)\\
r\sin\theta d\phi &= -\sin\phi dx + \cos\phi dy && (12)
\end{aligned}$$

これより Jacobian J を求めよ.

(解): $J = r^2\sin\theta$

(b) example: 微分演算子ラプラシアン $\Delta \equiv \nabla\cdot\nabla$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (*) && (13)\\
\Delta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad (*) && (14)\\
\Delta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (*) && (15)
\end{aligned}$$

(c) example: 微小距離 $(ds)^2$

デカルト座標 : $\quad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad (*)$

極座標 : $\quad (ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\phi)^2 \qquad (*)$

円筒座標 : $\quad (ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2 \qquad (*)$

(d) Taylor 展開

$$f(x+h) = f(x) + f^{'}(x)h + \frac{1}{2}f^{''}(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + \cdots \qquad (*)$$

**example:

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots \qquad (*) && (16)\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \qquad (*) && (17)\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (*) && (18)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \qquad (*) && (19)\\
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots \qquad (*) && (20)\\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \qquad (*) && (21)\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots \qquad (*) && (22)
\end{aligned}$$

**Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (*)$$

**Taylor 展開を使って Euler の公式を証明せよ.

5. 微分方程式

Definition:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \qquad u^{'} = \frac{du}{dx} \qquad (*)$$

(a) example :

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad (*)$$

(解): Put $u = e^{at}$. Then

$$(a^2 + \omega^2)e^{at} = 0$$

$a = \pm i\omega$

Therefore, u has two solutions.

$u = e^{i\omega}, e^{-i\omega}$

A general solution must be a linear combination of the two solutions.

$$u = Ae^{i\omega} + Be^{-i\omega}$$

From Euler's formula ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$),

$$u = A'\sin\omega t + B'\cos\omega t$$

Note: A, B, A' and B' are arbitary constants which should be determined from the initial condition.

(b) example :

$$\ddot{u} = f(u) = \frac{\partial g}{\partial u} \qquad (*)$$

(解): Multiply $\dot{u}$ to the both sides above.

$$\dot{u}\ddot{u} = \dot{u}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{u}^2}{dt} = \frac{dg}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 = g + C$$

$$\frac{du}{\sqrt{2(g(u) + C)}} = dt$$

(c) example :

Linear Differential Equation:

$$a_n \frac{d^n u}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0$$

(解):

Put $u = e^{\alpha t}$. Then

$$a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

The solutions are

$u_1 = e^{\alpha_1 t}, \cdots, u_n = e^{\alpha_n t}$.

Therefore, general solutions are

$$u = c_1 e^{\alpha_1 t} + \cdots + c_n e^{\alpha_n}$$

Here, α_n are roots of the equation.

6. ベクトル

Definition: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

空間が 3 次元のとき

内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

複素数内積 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z$

外積

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (*) \tag{23}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e_x} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{e_y} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{e_z} \quad (*) \tag{24}$$

絶対値 $\mid \mathbf{a} \mid = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

7. 行列

* n 次正方行列 *　$A = \{A_{ij}\}, i = 1, \cdots, n \qquad j = 1, \cdots, n$

複素共役　$(A^*)_{ij} = A^*_{ij}$

*転置行列 *　$(A^t)_{ij} = A_{ji}$

エルミート　$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$

*エルミート行列 *　$A = A^\dagger$

* 行列式 *

$$\det(A) \equiv \sum_P \epsilon_{(m_1 \cdots m_n)} A_{1m_1} \cdots A_{nm_n} \qquad (*)$$

where $\epsilon_{(m_1 \cdots m_n)}$ is $+1$ for even permutation and -1 for odd permutation.

公式

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad (*)$$

*トレース Tr *

$$\mathrm{Tr}A \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \qquad (*)$$

公式

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \qquad (*)$$

$$\det(A) = \exp(\mathrm{Tr} \ln A) \qquad (*)$$

証明：　Assume that A depends on x, and make its derivative.

$\frac{d\det(A(x))}{dx} = \sum_{ij} \Delta_{ij} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} = \sum_{ij} \det(A(x))(A^{-1})_{ji} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} = \det(A(x))\mathrm{Tr}(A^{-1}\frac{dA}{dx})$

By putting $A(x) = e^{xB}$ with B a constant matrix, we obtain

$\frac{d\det(e^{xB})}{dx} = \det(e^{xB})\mathrm{Tr}(e^{-xB}e^{xB}B) = \det(e^{xB})\mathrm{Tr}(B)$

This differential equation can be solved easily with the following solution,

$\ln\det(e^{xB}) = x\mathrm{Tr}(B) + C$. From $x = 0$, we find $C = 0$.

Thus, we obtain $\det(e^{xB}) = e^{x\mathrm{Tr}(B)}$.

By putting $x = 1$ and $A = e^B$, we find $\det(A) = e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}$

8. 固有値と固有関数

$$A\mathbf{u} = a\mathbf{u}$$

a: 固有値　　　$\mathbf{u}$: 固有関数

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}$$

成分で書くと

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} u_j = a u_i$$

固有値の求め方

$$\sum_{j=1}^{n} (A_{ij} u_j - a u_i) = 0 \qquad (*)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (A_{ij} - a\delta_{ij}) u_i = 0 \qquad (*)$$

Here δ_{ij} is 1 for $i = j$ and 0 for $i \neq j$.

これは u_j に対する連立方程式である．$u_j \neq 0$ の解があるためには

$$\det(A_{ij} - a\delta_{ij}) = 0 \qquad (*)$$

常識

** Any eigenvalue of Hermite matrix must be real. **

(解):

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = a \mid \mathbf{u} \mid^2 = (A^\dagger \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (a\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a^* \mid \mathbf{u} \mid^2$$

Therefore, we obtain $a = a^*$ which means a is real.

** The determinant of any unitary matrix is ± 1. **

(解):

$$\det(U^\dagger U) = 1$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \det(U^\dagger) &= \sum_P \epsilon_{(m_1 \cdots m_n)} A^*_{m_1 1} \cdots A^*_{m_n n} && (25) \\ &= (\sum_P \epsilon_{(m_1 \cdots m_n)} A_{m_1 1} \cdots A_{m_n n})^* && (26) \\ &= (\sum_P \epsilon_{(m_1 \cdots m_n)} A_{1 m_1} \cdots A_{n m_n})^* = (\det(U))^* && (27) \end{aligned}$$

$$\mid \det(U) \mid^2 = 1, \qquad \mid \det(U) \mid = \pm 1$$

9. 部分積分

Using the identity

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Putting $f' = F$,

$$\int Fg dx = fg - \int fg' dx \qquad (*)$$

example

$$\int \ln x dx = x \ln x - x - C$$