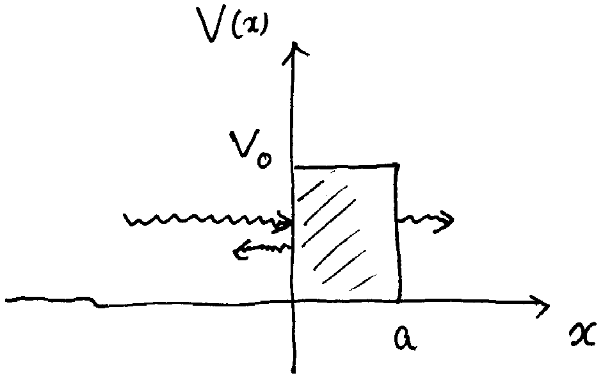
5. 散乱問題とトンネル効果

5-1 散乱問題（1次元）



斥力のポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

（但し $V_0>0$）

運動量（$\hbar k$），エネルギー（$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$）
の粒子がポテンシャルの壁にぶつかる

（$E<V_0$）

この時：
- 古典力学 ⇒ 粒子はすべてはねかえる
- 量子力学 ⇒（有限の確率で粒子は壁を通りぬけ、のこりの確率ではね返される。）

この散乱問題を解いて行く

⇓

1次元に限る

（3次元の取扱いはかなり難しい）

[Schrödinger 方程式]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

但し $V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$

(但し V_0 は正)

[このポテンシャルでは束縛状態は存在しない]

- $\boxed{\text{散乱問題の解き方}}$:

1. 条件 : 入射粒子が左からきてポテンシャルで散乱する

2. 解法 : (a) 領域に分けて微分方程式を解く

(b) 境界で接続

(c) 入射波、反射波、透過波 に分ける

No.

Date

(i) $x<0$ (領域I)：

この時ポテンシャル $V(x)=0$

Schrödinger方程式は

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{I}(x)}{dx^2}=E\psi_{I}(x)}$$

$E>0$ なので

$$\boxed{k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$ を導入する

Schrödinger方程式は

$$\underline{\frac{d^2\psi_{I}(x)}{dx^2}+k^2\psi_{I}(x)=0}$$

この一般解は

$$\underline{\psi_{I}(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}}$$

◎ 粒子が左からきてポテンシャル壁に散乱される

ぶつかる前までは

$\boxed{\text{自由粒子}}$ ⇒ 運動量の固有関数

• 運動量の固有関数

右に進む波 → 運動量は正

$\Downarrow$

$$\boxed{\psi_0(x) = A e^{ikx}}$$ がこれをみたす。

(証)　$\hat{p} = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$

$$\hat{p}\,\psi_0(x) = (-i\hbar)\, A \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx}$$

$$= \hbar k\, \psi_0(x)$$

よって $\psi_0(x)$ は $\hat{p}$ の固有関数であり、
$\hat{p}$ の固有値は $\boxed{\hbar k} > 0$ である。

$$\psi_0(x) = A e^{ikx}$$

を 入射波 という

◎ 反射波：　ポテンシャルの壁にぶつかり
反射する粒子(波)もある.

反射波：$\boxed{\psi_R(x) = Be^{-ikx}}$

左方向に進む波である.

全体としては　$x<0$ の領域では

$$\boxed{\psi_I(x) = \underset{\text{入射波}}{\underset{\Uparrow}{A e^{ikx}}} + \underset{\text{反射波}}{\underset{\Uparrow}{B e^{-ikx}}}}$$

となっている.

No.

Date

(ii) $0<x<a$ の領域 II

Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2}+V_0\psi_{II}(x)=E\psi_{II}(x)$$

ここで $\kappa=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}$ とくと

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2}-\kappa^2\psi_{II}(x)=0$$

この一般解は

$$\boxed{\psi_{II}(x)=C_1e^{\kappa x}+C_2e^{-\kappa x}}$$ である

(C_1, C_2 は接続条件によって決まる)

(iii) $x>a$ の領域 III

右方向にゆく波(粒子)のみが存在する
(透過波という)

$$\boxed{\psi_{III}(x)=De^{ikx}}$$

(左方向にゆく波はない!!)

[接続]

・ 波動関数 $\psi(x)$ と その微分係数 $\psi'(x)$
境界で接続する

(a) (I) と (II) の境界 $\boxed{x=0}$

$$\begin{cases} \psi_{I}(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x} \end{cases}$$

より

[$x=0$ での接続]

$$\begin{cases} A + B = C_1 + C_2 & : [\psi(0)] \\ ik(A-B) = \kappa(C_1 - C_2) & : [\psi'(0)] \end{cases}$$

(b) (II) と (III) の境界 $\boxed{x=a}$

$$\psi_{III}(x) = D e^{ikx}$$ より

[$x=a$ での接続]

$$\begin{cases} C_1 e^{\kappa a} + C_2 e^{-\kappa a} = D e^{ika} \\ \kappa(C_1 e^{\kappa a} - C_2 e^{-\kappa a}) = ikD e^{ika} \end{cases}$$

［解法］

入射波は Ae^{ikx}
その粒子の確率（フラックスともいう）は $|A|^2$

よって

透過確率 ： $\dfrac{|D|^2}{|A|^2}$

反射確率 ： $\dfrac{|B|^2}{|A|^2}$ と計算すればよい。

観測量： 散乱問題での観測量は
この透過確率と反射確率となる

［実例］ たとえば100個の粒子が入射して、
ポテンシャルの壁にぶつかったとする。
このうち30個が透過して
70個が反射したとすると

$$\begin{cases} \text{透過確率} = \dfrac{30}{100} = 0.3 \\ \text{反射確率} = \dfrac{70}{100} = 0.7 \end{cases}$$ となる。

［計算］

(1)　$x=0$ の接続条件より

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}\left[A + B + \frac{ik}{\kappa}(A-B)\right] \\ C_2 = \frac{1}{2}\left[A + B - \frac{ik}{\kappa}(A-B)\right] \end{cases}$$

(2)　$x=a$ の接続条件より

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} D\, e^{ika-\kappa a}\left(1 + \frac{ik}{\kappa}\right) \\ C_2 = \frac{1}{2} D\, e^{ika+\kappa a}\left(1 - \frac{ik}{\kappa}\right) \end{cases}$$

これらの式で C_1, C_2 を消去すると

$$\begin{cases} A+B + \frac{ik}{\kappa}(A-B) = D e^{ika-\kappa a}\left(1+\frac{ik}{\kappa}\right) \\ A+B - \frac{ik}{\kappa}(A-B) = D e^{ika+\kappa a}\left(1-\frac{ik}{\kappa}\right) \end{cases}$$

ここで

$$X \equiv \frac{1+\frac{ik}{k}}{1-\frac{ik}{\kappa}}$$

と定義すると

$$\begin{cases} X + \frac{B}{A} = \frac{D}{A} X e^{ika-\kappa a} \\ \frac{1}{X} + \frac{B}{A} = \frac{D}{A}\frac{1}{X} e^{ika+\kappa a} \end{cases}$$

と求まる

この式を $\frac{D}{A}$ について解くと

$$\boxed{\frac{D}{A} = e^{-ika}\left(\frac{\chi^2 - 1}{\chi^2 e^{-\kappa a} - e^{\kappa a}}\right)}$$

となる。

[特別な場合] $e^{\kappa a} \gg 1$ を考える

この時：$\boxed{\frac{D}{A} = e^{-\kappa a - ika}(1-\chi^2)}$

となる。但し $\chi = \frac{1+\frac{i\kappa}{k}}{1-\frac{i\kappa}{k}}$

より、

透過確率は

$$\left|\frac{D}{A}\right|^2 = e^{-2\kappa a}\left|(1-\chi^2)\right|^2$$

となる。