No.

Date

5-3 連続方程式(カレント保存則)

一般に $\begin{cases} 密度 & \rho(\mathbf{r},t) \\ カレント & \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \end{cases}$ とするとき

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$$ を連続方程式という

(カレント保存則ともいう)

- $\boxed{\text{Schrödinger 方程式は連続方程式をみたす}}$

(証)
$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r},t) + U \psi(\mathbf{r},t)$$

(但し, $U(\mathbf{r})$ は実関数)

この式の複素共役の式は

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^*(\mathbf{r},t) + U \psi^*(\mathbf{r},t)$$

ここで

$$i\hbar \left(\psi^*(\mathbf{r},t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} \psi(\mathbf{r},t) \right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^*(\mathbf{r},t) \left(\nabla^2 \psi(\mathbf{r},t) \right) + \psi^*(\mathbf{r},t) U \psi(\mathbf{r},t)$$
$$+ \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla^2 \psi^*(\mathbf{r},t) \right) \psi(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t) U \psi(\mathbf{r},t)$$

よって

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*(\mathbf{r},t)\,\psi(\mathbf{r},t)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\left[\psi^*(\mathbf{r},t)\left(\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right)-\left(\nabla\psi^*(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)\right]$$

従って

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r},t) \equiv \psi^*(\mathbf{r},t)\,\psi(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \dfrac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\mathbf{r},t)\left(\nabla\psi(\mathbf{r},t)\right)-\left(\nabla\psi^*(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)\right] \end{cases}$$

と定義すると

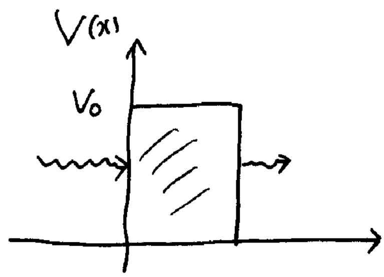
$$\boxed{\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0}$$

が成立つ

$$\cdot\begin{cases} \rho(\mathbf{r},t) & : \text{確率密度} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) & : \text{カレント(流れ)[密度] という} \end{cases}$$

[1次元散乱問題]

1次元の場合 ： $\boxed{\hat{j}_x = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)\psi\right]}$



(a) 入射波 ： $\psi_0(x) = A\, e^{ikx}$ である。
[$x<0$]

このとき

$$\hat{j}_x = \frac{\hbar}{2mi}\left[A^* e^{-ikx}(ikAe^{ikx}) - A^*(-ik)e^{-ikx}Ae^{ikx}\right]$$

$$\therefore\ \hat{j}_x = \frac{\hbar}{2mi}\cdot|A|^2\cdot 2ik = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

$\boxed{\hat{j}_x = \frac{\hbar k}{m}|A|^2}$ ： 入射カレント

(b) [$0<x<a$] の時 ：

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}$$

これは実数なので

$$\boxed{\hat{j}_x = 0}$$

No.

Date

118

(c) [$x > a$] 透過波

$$\psi_{\text{III}}(x) = D e^{ikx}$$

$$\boxed{\hat{j}_x = \frac{\hbar k}{m} |D|^2}$$

これより 透過確率 P は

$$P = \frac{\hat{j}_x(\text{透過波})}{\hat{j}_x(\text{入射波})}$$

$$= \frac{\frac{\hbar k}{m}|D|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} = \frac{|D|^2}{|A|^2}$$ となる.

【Maxwell方程式における連続方程式】

Maxwell方程式は

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \\
\nabla\times\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, & \nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

が成立っている。

・ もともと Ampére の法則は

$$\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j}$$ であった。

ところがこの式は

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \nabla\cdot\mathbb{j} = 0$$ となってしまい

連続方程式

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbb{j} = 0}$$ と矛盾する。

そこで Maxwell は Ampere の法則を修正して

$$\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$ とした。

これだと $$\nabla\cdot\nabla\times\mathbb{B} = 0 = \mu_0 \nabla\cdot\mathbb{j} + \frac{1}{c^2}\nabla\cdot\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

ところが $\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ だから

$$0 = \mu_0 \nabla\cdot\mathbb{j} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$ となる

ここで　$C = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$　と定義してあったから

$$\mu_0 \nabla \cdot j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \quad \underline{\nabla \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

となり連続方程式をみたしている

【連続方程式 $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot \vec{j} = 0\right]$ の物理】 /2/

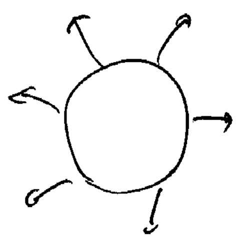
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot \vec{j} = 0$$ を体積V中で積分する

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = -\int_V \nabla\cdot \vec{j}\, d^3r$$

$Q \equiv \int \rho\, d^3r$ と電荷を定義すると

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V \nabla\cdot \vec{j}\, d^3r = -\int_S j_n\, dS$$

（↑Gaussの定理より）



（$\int j_n dS$ は表面Sから流れでる電流をすべて足したもの。マイナスがつくのは表面から外向の積分で定義されているから。）

書き直して $\boxed{\Delta Q = -\Delta t \cdot \int j_n\, dS}$

［単位時間あたりの電荷の変化量］